

## Détermination de la diffusivité thermique du matériau filasse plâtre par méthode numérique: Influence du nombre de Biot et du coefficient d'échange thermique en régime transitoire

[ Determination of the thermal diffusivity to tow plaster by numerical method: Influence the Biot number and the heat exchange coefficient in transient regime ]

*Papa Touty Traore<sup>1</sup>, M.S. Ould Brahim<sup>1</sup>, Youssou Traore<sup>1-2</sup>, Alassane Ba<sup>2</sup>, Dame Diao<sup>1</sup>, Seydou Faye<sup>1</sup>, Issa Diagne<sup>1</sup>, and Gregoire Sissoko<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Laboratory of Semiconductors and Solar Energy, Physics Department, Faculty of Science and Technology, University Cheikh Anta Diop, Dakar, Senegal

<sup>2</sup>Université de Thiès, Thiès, Senegal

---

Copyright © 2018 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

**ABSTRACT:** The thermal transfer in the tow plaster (insulating material) is modeled by numerical method resolution in transient regime. The discretization of the reduced space variable and the reduced temporal variable is applied to the heat equations, the boundary conditions and the initial condition. The expressions of the dimensionless temperature allowed to represent the curves of evolution of the reduced temperature in the reduced time. The time constant characterizing the reduction of the reduced temperature in the material makes it possible to calculate its thermal diffusivity.

**KEYWORDS:** Thermal diffusivity, time constant, numerical method, transient regime.

**RÉSUMÉ:** Le transfert thermique en régime transitoire à travers un matériau isolant filasse-plâtre est modélisé par la méthode de résolution numérique. A partir de la discrétisation de la variable réduite d'espace et de la variable réduite temporelle, les équations de la chaleur, des conditions aux limites et de la condition initiale sont discrétisées et réduites. Les expressions de la température adimensionnelle ont permis de représenter les courbes d'évolution de la température réduite dans le temps réduite. La constante de temps qui caractérise la diminution de la température réduite au sein du matériau permet de calculer la diffusivité thermique du matériau.

**MOTS-CLEFS:** Diffusivité thermique, constante de temps, méthode numérique, régime transitoire.

### 1 INTRODUCTION

La connaissance des paramètres thermo physiques à savoir la conductivité thermique et la diffusivité thermique permet de montrer le caractère isolant ou conducteur d'un matériau. Ainsi dans la littérature plusieurs méthodes de déterminations de ces paramètres ont été proposées ; la méthode impulsionnelle ou la méthode Flash [1], la méthode de Degiovannie [2], la méthode de maréchal et Devisme [3] utilisant le diagramme de Bode et Nyquist [4].

Nous proposons une méthode de détermination de la diffusivité thermique. Le matériau filasse-plâtre [5] subit un réchauffement à la face avant et un refroidissement à a face arrière. Nous représentons les courbes de température réduite

au niveau de la face refroidis à partir de l'évaluation du temps de refroidissement de la face arrière, nous déterminons la diffusivité thermique à l'état d'équilibre thermique du matériau.

## 2 ETUDE THÉORIQUE

### 2.1 DISPOSITIF D'ÉTUDE

Un matériau plan, constitué de filasse et de plâtre, supposé homogène, d'épaisseur 5cm, est soumis aux niveaux de ses deux faces à des contraintes climatiques. Les contraintes climatiques sont définies par la température du milieu et le coefficient d'échange thermique entre la paroi et le milieu ambiant. Nous supposons que l'écoulement du flux de chaleur est unidirectionnel.

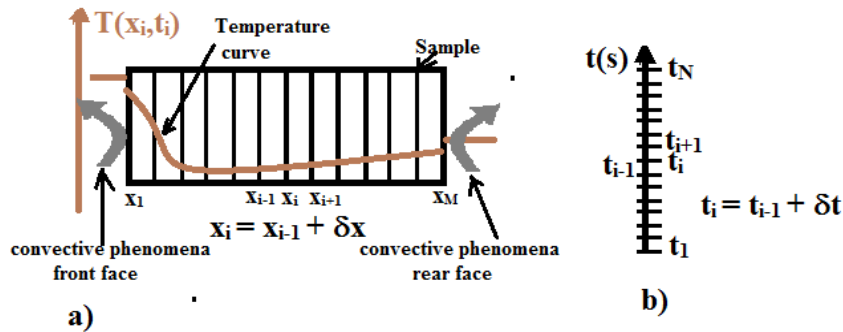


Figure 1 : schéma du dispositif d'étude. a) matériau filasse-plâtre discrétisé suivant l'axe (ox) et soumis à des contraintes climatiques extérieures ; b) discrétisation du temps.

### 2.2 SOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

L'équation de la chaleur sans puits de chaleur est donnée par l'expression suivante

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (1)$$

Où  $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$  est la diffusivité thermique du matériau supposé uniforme.

$\lambda$  = conductivité thermique du matériau

$\rho$  = la masse volumique

$C$  = la chaleur massique

Les équations (2) et (3) traduisent la conservation du flux de chaleur à la surface du matériau et l'équation (4) représente la condition initiale.

$$\begin{cases} h_1(T(0, t) - T_{f1}) = \lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} |_{x=0} & (2) \\ h_2(T(L, t) - T_{f2}) = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} |_{x=L} & (3) \\ T(x, 0) = T^0 & (4) \end{cases}$$

On réécrit l'équation de la chaleur et les conditions aux limites sous forme adimensionnelle.

On pose la température réduite

$$\theta = \frac{T - T^0}{T_{f1} - T_{f2}} \quad (5)$$

La variable réduite d'espace

$$\check{x} = \frac{x}{L} \quad (6)$$

Le temps de Fourier

$$\tau = \frac{\alpha \cdot t}{L^2} \quad (7)$$

L'équation de la chaleur sous forme réduite est donnée par la relation suivante

$$\frac{\partial^2 \theta(\tilde{x}, \tau)}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial \theta(\tilde{x}, \tau)}{\partial \tau} = 0 \quad (8)$$

Nous donnons les conditions aux limites pour  $\tilde{x} = 0$ , relations (9) et (10), et la condition initiale sous la forme réduite relation (11) pour  $\tilde{\tau} = 0$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} (\theta(0, \tau) - \gamma_1) = \frac{-1}{\beta_1} \frac{\partial \theta(\tilde{x}, \tau)}{\partial \tilde{x}} \\ \tilde{x} = 1 \\ (\theta(1, \tau) - \gamma_2) = \frac{1}{\beta_2} \frac{\partial \theta(\tilde{x}, \tau)}{\partial \tilde{x}} \\ \theta(\tilde{x}, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\quad (10)$$

$$\quad (11)$$

Les coefficients adimensionnels  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont donnés par les expressions suivantes

$$\gamma_1 = \frac{T^0 - T_{f1}}{T_{f1} - T_{f2}} \quad (12)$$

$$\gamma_2 = \frac{T^0 - T_{f2}}{T_{f1} - T_{f2}} \quad (13)$$

On fait une discrétisation de l'espace en M nœud (figure 1a) et du temps en N nœud (figure 1b). Le pas d'espace est  $\Delta x$  dans la direction (Ox) et celui du temps est  $\Delta t$ . Les pas sont constants.

$\theta_i^j$  est la température au nœud i à la date tj

$$\tilde{x}_i = (i - 1)\Delta \tilde{x} \quad (14)$$

$$\tau_j = (j - 1)\Delta \tau \quad (15)$$

L'indice i repère la variable x et l'indice j repère la variable t.

Nous faisons les considérations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\tau \approx \Delta \tau \\ d\tilde{x} \approx \Delta \tilde{x} \end{array} \right. \quad (16)$$

$$\quad (17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\theta \approx \theta_i^j - \theta_{i-1}^j \approx \theta_{i+1}^j - \theta_i^j \\ d^2\theta \approx (\theta_{i+1}^j - \theta_i^j) - (\theta_i^j - \theta_{i-1}^j) \\ d^2\theta = \theta_{i-1}^j - 2\theta_i^j + \theta_{i+1}^j \end{array} \right. \quad (18)$$

$$\quad (19)$$

$$\quad (20)$$

En tenant compte des équations (16), (17), (18) et (19), les différentes parties de l'équation (1) sont données par les équations (21) et (22).

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial \tilde{x}^2} \approx \frac{\theta_{i-1}^j - 2\theta_i^j + \theta_{i+1}^j}{\Delta \tilde{x}^2} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial \tau} \approx \frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta \tau} \quad (22)$$

En tenant compte des équations (21) et (22), l'équation (1) de la chaleur est traduite par l'équation (23).

$$\theta_i^{j+1} = (1 - 2P)\theta_i^j + P\theta_{i+1}^j + P\theta_{i-1}^j \quad (23)$$

L'expression de P, correspondant au nombre de Fourier, est donnée par la relation (24) et la relation (25) est la condition de stabilité de l'algorithme.

$$P = \frac{\Delta\tau}{\Delta\check{x}^2} \quad (24)$$

$$\Delta\tau < \frac{\Delta\check{x}^2}{2} \quad (25)$$

Pour discrétiser les conditions aux limites nous ajoutons deux nœuds fictifs :  $i = 0$  et  $i = M + 1$ .

Au point  $i = 1$ , nous tenons compte du nœud fictif  $i = 0$  et au point  $i = M$ , nous considérons le nœud fictif  $M+1$ . Les conditions aux limites (2) et (3) deviennent (26) et (27) ; l'équation (28) définit la condition initiale pour  $\tau=0$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\theta(\check{x}, \tau)}{\partial\check{x}} = \frac{\theta_2^j - \theta_0^j}{2\Delta\check{x}} = -\beta_1 \cdot (\theta_1^j - \gamma_1) \quad (26) \\ \frac{\partial\theta(\check{x}, \tau)}{\partial\check{x}} = \frac{\theta_{M+1}^j - \theta_{M-1}^j}{2\Delta\check{x}} = \beta_2 \cdot (\theta_M^j - \gamma_2) \quad (27) \\ \theta(\check{x}, 0) = \theta_i^1 \quad (28) \end{array} \right.$$

Les équations (29) et (30) traduisent les conditions aux nœuds fictifs pour  $i=0$  et  $i=M+1$  à l'instant  $j$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0^j = \theta_2^j + 2\Delta\check{x} \cdot \beta_1 \cdot (\theta_1^j - \gamma_1) \quad (29) \\ \theta_{M+1}^j = \theta_{M-1}^j + 2\Delta\check{x} \cdot \beta_2 \cdot (\theta_M^j - \gamma_2) \quad (30) \end{array} \right.$$

En réaménageant les équations (29) et (30) on obtient les équations (31) et (32)

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1^{j+1} = (1 - 2P)\theta_1^j + P\theta_2^j + P\theta_0^j \quad (31) \\ \theta_M^{j+1} = (1 - 2P)\theta_M^j + P\theta_{M+1}^j + P\theta_{M-1}^j \quad (32) \end{array} \right.$$

Les équations (31) et (32) dans l'équation (23) nous donnent les équations (33) et (34) qui sont les conditions aux limites réduites aux nœuds  $i=1$  et  $i=M$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1^{j+1} = [(1 - 2P) + 2P\Delta\check{x} \cdot \beta_1]\theta_1^j + 2P\theta_2^j - 2P\Delta\check{x} \cdot \beta_1\gamma_1 \quad (33) \\ \theta_M^{j+1} = [(1 - 2P) + 2P\Delta\check{x} \cdot \beta_2]\theta_M^j + 2P\theta_{M-1}^j - 2P\Delta\check{x} \cdot \beta_2\gamma_2 \quad (34) \end{array} \right.$$

On pose  $\tilde{A} = [(1 - 2P) + 2P\Delta\check{x} \cdot \beta_1]$   $\tilde{B} = [(1 - 2P) + 2P\Delta\check{x} \cdot \beta_2]$   $\tilde{C} = 2P\Delta\check{x} \cdot \beta_1\gamma_1$

$$\tilde{D} = 2P\Delta\check{x} \cdot \beta_2\gamma_2$$

Où  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  et  $\tilde{D}$  sont des coefficients adimensionnels

### 3 RÉSULTATS ET DISCUSSION

Le matériau filasse-plâtre subit un échauffement à la face avant et un refroidissement à la face arrière. Les températures des milieux avant et arrières sont respectivement  $T_{f1} = 303K$  et  $T_{f2} = 290K$  ; la température initiale du matériau est  $T_i = 293K$ . Le

matériau est supposé homogène, de conductivité thermique  $\lambda=0.15W.m^{-1}K^{-1}$  et de diffusivité  $\alpha=2,07.10^{-7} m^2.s^{-1}$ . Pour la discrétisation de l'espace, le nombre de nœud est  $M=100$  et pour la discrétisation du temps, le nombre de nœud est  $N=50000$ .

Les courbes des figures 2 et 3 montrent l'évolution de la température réduite en fonction du temps de Fourier ; l'influence du nombre de Biot est mise en exergue.

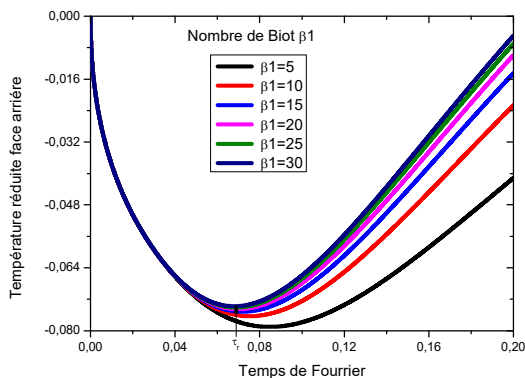


Figure 2 : Evolution de la température réduit en fonction du temps de fourrier – influences nombre Biot  $\beta_1$ .  $\tilde{x} = 1$ .

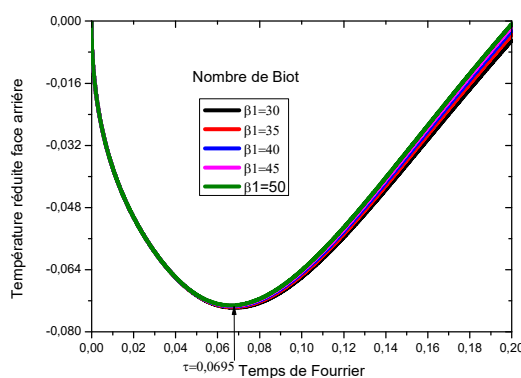


Figure 3 : Evolution de la température réduit en fonction du temps de fourrier – influences nombre Biot  $\beta_1$ .  $\tilde{x} = 1$

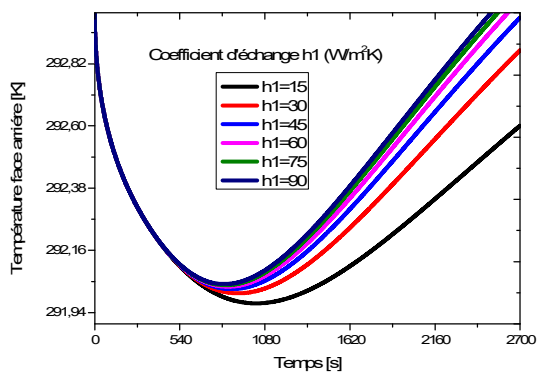


Figure 4 : Evolution de la température au cours du temps – influences du coefficient d'échange thermique  $h_1$ .  $h_2=5 W/m^2K$ ;  $x=5cm$ .

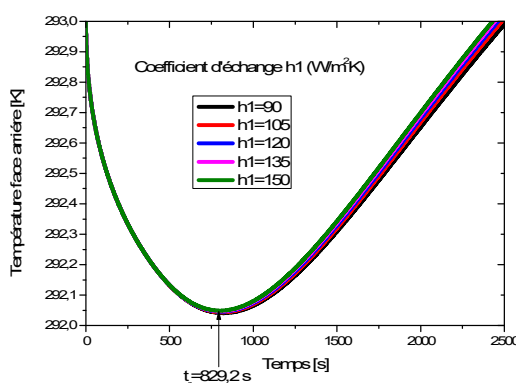


Figure 5 : Evolution de la température au cours du temps – influences du coefficient d'échange thermique  $h_1$ .  $h_2=5 W/m^2K$ ;  $x=5cm$ .

Pour différentes valeurs du nombre de Biot, les courbes de température réduite en fonction du temps des figures 2 et 3 montrent la même évolution. Les courbes présentent un minimum de température pour un temps de Fourier compris entre 0.05 et 0.09. Nous notons  $\tau_r$  la date qui sépare les deux comportements différents du mur :

- Pour  $\tau < \tau_r$ , le mur a un comportement idéal en isolant thermique et les phénomènes de rétention de la chaleur sont importants.
- Pour  $\tau > \tau_r$ , le comportement en isolant du mur diminue d'efficacité et il devient de plus en plus conducteur au fur du temps.

Ce minimum de température reste constant lorsque le nombre de Biot à la face avant est supérieur à 30 ; ce qui va nous permettre de déterminer  $\tau_r=0.0695$

L'efficacité de l'isolant thermique dépend fortement des contraintes climatiques.

Les courbes des figures 4 et 5 montrent la même évolution de température à la face arrière en fonction du temps. Le phénomène de refroidissement et de réchauffement sont notés séparés par un instant  $t=t_r$ .

- Pour  $t < t_r$ , le mur a un comportement idéal en isolant thermique et les phénomènes de rétention de la chaleur sont important car il y'a diminution de la température.

- Pour  $t > t_r$ , le comportement en isolant du mur diminue d'efficacité et il devient de plus en plus conducteur au fur du temps car il y'a élévation de la température

Le minimum de la température atteint est constant lorsque le coefficient d'échange à la face avant est supérieur à  $90W/m^2K$  et  $t_r=829.2s$ .

**Tableau 1 : Influence du nombre Biot à la face avant sur la constante de temps de refroidissement)**

Nombre de Biot face avant $\beta_1$	5	10	15	20	25	30
Constante de temps de refroidissement $\tau_r$	0.08776	0.07669	0.07432	0.0724	0.07191	0.0695

**Tableau 2 : Influence du coefficient d'échange face avant à la face avant sur de temps de refroidissement**

Coefficientd'échnage face avant $h_1(W/m^2K)$	15	30	45	60	75
Temps de refroidissement $t_r(s)$	1020	911.6	865.2	844.4	834.4

Le tableau 1 et tableau 2 donnent respectivement les différentes valeurs de  $\tau_r$  pour quelques valeurs du nombre de Biot à la face avant et différentes valeurs de  $t_r$  pour quelques valeurs du coefficient d'échange face avant. L'augmentation du nombre de Biot et celle du coefficient d'échange entraine respectivement une diminution de  $\tau_r$  et de  $t_r$ . Ces phénomènes montrent que l'efficacité de l'isolant thermique diminue quand les échanges de chaleur sont importants à la face du mur.

Pour des nombres de Biot supérieur à 30, les effets des échanges climatiques deviennent faibles pour  $t > t_r$  (figure 3) ; les phénomènes de conduction sont important et le matériau est à l'équilibre thermique [7].

De même que pour des coefficients d'échanges à la face supérieur à  $90 W/m^2K$  le matériau atteint l'équilibre thermique (figure 5).

A partir de l'expression du temps de Fourier on détermine l'expression de la diffusivité thermique théorique  $\alpha_t$  du matériau.

$$\alpha_t = 0,0695 \frac{L^2}{t_r} \quad (35)$$

**0.0695** représente la constante de temps refroidissement à l'équilibre thermique.

**L** représente l'épaisseur du matériau

**$t_r$**  est le temps de refroidissement de la face arrière que l'on détermine à partir de la courbe d'évolution de la température en fonction du temps d'excitation.

**Tableau 3 : Influence du coefficient d'échange sur la diffusivité thermique**

$h_1(W/m^2K)$	15	30	45	60	75
$t_r(s)$	1020	911.6	865.2	844.4	834.4
$L(m)$	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$\alpha_t(m^2/s)$ (Valeur théorique)	$1,703.10^{-7}$	$1,905.10^{-7}$	$2,008.10^{-7}$	$2,057.10^{-7}$	$2,083.10^{-7}$
$\alpha_c(m^2/s)$ (Valeur expérimentale)	$2,07. 10^{-7}$	$2,07. 10^{-7}$	$2,07. 10^{-7}$	$2,07. 10^{-7}$	$2,07. 10^{-7}$
$\Delta\alpha(m^2/s) \frac{\Delta\alpha}{\alpha}$	0,17	0,07	0,02	0,006	0.006

**Tableau 4: Influence du coefficient d'échange sur la diffusivité thermique**

$h1(W/m^2K)$	90	105	120	135	150
$t_r(s)$	829.2	829.2	829.2	829.2	829.2
$L(m)$	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$\alpha(m^2/s)$ (Valeur théorique)	$2,095. 10^{-7}$	$2,095. 10^{-7}$	$2,095. 10^{-7}$	$2,095. 10^{-7}$	$2,095. 10^{-7}$
$\alpha(m^2/s)$ (Valeur expérimentale)	$2,07. 10^{-7}$	$2,07. 10^{-7}$	$2,07. 10^{-7}$	$2,07. 10^{-7}$	$2,07. 10^{-7}$
$\Delta\alpha(m^2/s) \frac{\Delta\alpha}{\alpha}$	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01

Les tableaux 3 et 4 donnent quelques valeurs de la diffusivité thermiques calculées à partir de l'expression (35). Ces dernières comparées à la valeur expérimentale de la diffusivité thermique donne une erreur minimale  $\Delta\alpha=0.006$  et une erreur maximale  $\Delta\alpha=0.17$ . Ces faibles erreurs de calcul montrent que notre la méthode de calcul peut être considérée comme une méthode d'estimation de la diffusivité thermique des matériaux.

#### 4 CONCLUSION

La méthode de détermination de la diffusivité thermique basée sur une résolution numérique a permis de trouver une valeur théorique de la diffusivité thermique très proche de la valeur expérimentale. La valeur de la diffusivité théorique est obtenue lorsque le matériau a atteint son état d'équilibre thermique. Le comportement de bon isolant est visualisé à partir du temps de refroidissement de la face arrière qui traduit le phénomène de rétention de la chaleur par le matériau.

La valeur de la diffusivité thermique montre que la filasse plâtre peut être utilisée dans l'isolation thermique de l'habitat.

#### RÉFÉRENCES

- [1] Marechal J.C. and Devisme J.M. « Diffusivité thermique des matériaux de construction: Méthode du signal périodique ». Anales I.T.B.T.P n° 357, Janvier 1978.
- [2] A. Degiovanni, M. Laurent. Une nouvelle technique d'identification de la diffusivité thermique pour la méthode " flash ". Revue de Physique Appliquée, 1986, 21 (3), pp.229-237.
- [3] D.L. Balageas. Nouvelle méthode d'interprétation des thermo grammes pour la détermination de la diffusivité thermique par la méthode impulsionnelle (méthode " flash "). Revue de Physique Appliquée, 1982, 17 (4), pp.227-237.
- [4] K. Ould Cheikh, I. Diagne, M. L. Sow, M. S. Ould Brahim, A. Diouf, K. Diallo, M. Dieng and G. Sissoko. Interpretation of the phenomena of heat transfer from representations of Nyquist and Bode plots - 2013 - Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology 5(4): 1118-1122, ISSN: 2040-7459.
- [5] Voumbo, M. L., A. Wareme and G. Sissoko, 2010. Characterization of Local Insulators: Sawdust and Wool of Kapok. Res. J. Appl. Sci. Eng. Technol.,2(2): 138-142.
- [6] Y. Traore, I. Diagne, C. Sarr, M. S. Ould Brahim, A. K. Diallo, H. Ly Diallo and G. Sissoko. Influence of thermal exchange coefficient on the heat retention rate of a concrete wall contiguous to a thermal insulation tow-plaster. ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. Vol. 11, N° 5, 2016.
- [7] Zhiguo.Qu, H.Xu, W.Tao. Numerical simulation of non-equilibrium conjugate heat transfer in tubes partially filled with metallic foams-Journal of thermal science and technology-vol 7-no 1,2012,pp.151-165.
- [8] S.hadi, M.Nishitani A.T. Wijayanta , K .Kurata and H .Takamatsu.Measurement of thermal conductivity and thermal diffusivity of solid materials using a novel stamp sensor :Feasibility study with numerical analysis-Journal of thermal science and technology-vol 7-no 4,2012,pp.536-538.
- [9] Yi .xu , L. Jiang, J. Liu ,Y. Zhang , J. Xu and G.He .Experimant study and modeling on effective thermal conductivity of EPS lightweight concret -Journal of thermal science and technology-vol 11-no 2,2016,pp.1-13.