International Journal of Innovation and Scientific Research
ISSN 2351-8014 Vol. 25 No. 2 Jul. 2016, pp. 528-535

http://www.ijisr.issr-journals.org/

# Bases intégrales de corps quartiques

***Mouhcine TALJAOUI*[1] *and Mostapha BOUHAMZA*[2]**

Université Hassan 2 Casablanca, Faculté des sciences Ain Ckok,
Département de Mathématique et Informatique, Casablanca, Maroc

[1]taljaoui@gmail.com

[2]m.bouhamza@fsac.ac.ma



**ABSTRACT:** La recherche de base d'entiers algébriques dans un corps quadratiques fait partie des résultats de Dedekind dans les années 1900, pour les corps cubiques les résultats sont données par Daniel Marcus 1973, Sous les mêmes hypothèses Nous proposons dans ce papier les bases d'entiers de Corps quartiques (de degré 4).

**KEYWORDS:** Corps biquadratiques, Corps quartiques, Bases intégrales.

Le but de ce travail est d'exhiber une base d'entiers algébriques dans un corps quartique pur (de degré 4) sur l'ensemble des rationnels **Q**.

Soit m un entier supérieur à 1 sans facteur bicarré (libre de quatrième puissance**)**, il existe 3 entiers l, h et k sans facteur carré et premiers entre eux deux à deux, tels que $m = lh^2k^3$,

On note K = **Q**[ω] un corps de degré 4 où $\omega = m^{1/4}$ et **A** l'anneau des entiers algébriques sur **Q** et notons **R** = **A**∩**Q**[ω].

Nous allons énoncer un théorème de Daniel A.MARCUS. (1973).

**<u>Théorème1 :</u>**

Pour tout entier algébrique ω de degré n sur Q ; il existe une base intégrale de l'anneau des entiers algébriques sur Q de la forme $(1 ; f_1(\omega)/d_1 ; f_2(\omega)/d_2 ; \ldots. f_{n-1}(\omega)/d_{n-1})$ ; $d_i \in Z$ et $d_i$ divise $d_j$ pour tout i < j et $f_i$ des polynômes unitaires de degré i à coefficients dans **Z**.

**<u>Preuve :</u>** (voir référence (1) )

Dans notre travail nous restreindrons les résultats du théorème1 à l'ordre 4,

On peut énoncer que :

L'anneau **R** = **A**∩**Q**[ω] admet comme base d'entiers la famille $B_4 = (1 ; f_1(\omega)/d_1 ; f_2(\omega)/d_2 ; f_3(\omega)/d_3)$.

Nous définissons maintenant explicitement les $f_i$ et $d_i$ pour chaque i.

**<u>Proposition1 :</u>**

Sous les hypothèses précédents on a disc (ω) = $-256m^3$

**<u>Preuve :</u>**

On a $Irr(\omega) = \omega^4 - m$ donc $Irr'(\omega) = 4\,\omega^3$

$disc(\omega) = N(Irr'(\omega)) = N(4\,\omega^3) = 4^4\,N(\omega^3) = 256(N(\omega))^3 = -256m^3$

**Proposition2 :**

Sous les hypothèses du théorème1 on a :

Pour tout $i + j < n$ on a : $d_i d_j$ divise $d_{i+j}$ **(1)** et Pour tout $i < n$ on a : $d^i_1$ divise $d_i$ **(2)**

**Preuve :**

Montrons **(1)**

Considérons $f_i(\omega).f_j(\omega)/ d_i d_j$

Ce terme est un entier algébrique car produit de deux entiers algébriques.

Et on a $f_i(\omega).f_j(\omega)/ d_i d_j = f_i(\omega).f_j(\omega)/ d_{i+j} * d_{i+j} / d_i d_j$ (*)

D'autre part $f_i(\omega).f_j(\omega)$ est un polynôme unitaire de degré i+j

Donc : $f_i(\omega).f_j(\omega)/ d_{i+j}$ est un entier algébrique

Appliquons la trace aux deux termes de (*) on aura

$tr\ (f_i(\omega).f_j(\omega)/ d_i d_j) = tr\ (f_i(\omega).f_j(\omega)/ d_{i+j}) * d_{i+j} / d_i d_j$

Et puisque $tr\ (f_i(\omega).f_j(\omega)/ d_i d_j)$ et $tr\ (f_i(\omega).f_j(\omega)/ d_{i+j})$ sont dans **Z**, on déduit que $d_{i+j} / d_i d_j$ est dans **Z**

D' où : $d_i d_j$ divise $d_{i+j}$

Montrons maintenant **(2)** par récurrence sur i

On a $d_1$ divise $d_2$ et $d_2/ d_3$ et d'après **(1)** $d_1\ d_2$ divise $d_3$

On aussi $d_1 * d_1$ divise $d_{1+1} = d_2$ c. a .d $d_1^2$ divise $d_2$

Supposons que pour tout $i < n$ $d^i_1$ divise $d_i$ et montrons que $d^{i+1}_1$ divise $d_{i+1}$

On a $d_1$ divise $d^i_1$ divise $d_i$

Donc $d_1 * d_i$ divise $d_{i+1}$ d'après (1)

Et $d^{i+1}_1 = d_1 * d^i_1$ divise $d_1 * d_i$

D' où : $d^{i+1}_1 = d_{i+1}$

On conclut que : $d^i_1$ divise $d_i$ Pour tout $i < n$

On vérifie aussi que pour tout $i < 4$ $d_1^i$ divise $d_i$ et $d_1^{4(4-1)}$ divise disc(ω)

Donc : $d_1^{12}$ divise $- 256\ m^3 = - 2^8\ m^3$

D'où : $d_1 = 1$ sauf si 4 divise m dans ce cas $d_1 = 1$ ou $d_1 = 2$

**Généralisation :**

Pour une base à l'ordre n : $B_n = (1 ; f_1(\omega)/d_1 ; f_2(\omega)/d_2 ; …; f_{n-1}(\omega)/d_{n-1})$

On peut montrer que $disc(\omega) = - n^n m^{n-1}$

On considérera le polynôme $P(x) = x^n - m$

Et appliquer la formule $disc(\omega) = N\ (P'(\omega))$

On a montré que $d_1 = 1$ sauf si 4 divise m

On pose $\beta = (\omega + a)/ 2$ avec $a \in$ **Z**

On suppose que β est un entier algébrique

Donc : $\beta^4$ est aussi un entier algébrique

On calcule la trace de $\beta^4$

$$\beta^4 = (\omega + a)^2/ 4 * (\omega + a)^2/ 4 = (\omega^4 + 4a\,\omega^3 + 6a^2\omega^2 + 4a^3\omega + a^4)/ 16$$
$$= (m + 4a\,\omega^3 + 6a^2\omega^2 + 4a^3\omega + a^4)/ 16$$

Et tr $(\beta^4)$ = tr(m)/16 + tr($a^4$) /16 + a tr($\omega^3$ ) /4 + $a^3$ tr($\omega$)/4 + 3$a^2$ tr($\omega^2$ )/8

= m/4 + $a^4$/4 + a tr ($\omega^3$) /4 + $a^3$ tr($\omega$)/4 + 3$a^2$ tr ($\omega^2$)/8

= m/4 + $a^4$/4 + 1/8 (2a tr ($\omega^3$) + 2$a^3$ tr($\omega$) + 3$a^2$ tr ($\omega^2$))

Or on a tr($\omega$) = tr ($\omega^2$) = tr ($\omega^3$) = 0

En effet : tr($\omega$) = $\sigma_1(\omega) + \sigma_2(\omega) + \sigma_3(\omega) + \sigma_4(\omega)$ où les $\sigma_i$ sont des Q-isomorphismes

Définies par $\sigma_1(\omega) = \omega$ et $\sigma_2(\omega) = -\omega$ et $\sigma_3(\omega) = i\omega$ et $\sigma_4(\omega) = -i\omega$

de même pour tr $\omega^2$) = $\sigma_1(\omega^2) + \sigma_2(\omega^2) + \sigma_3(\omega^2) + \sigma_4(\omega^2)$

Où les $\sigma_i$ sont des Q-isomorphismes définies par

$\sigma_1(\omega^2) = \omega^2$ et $\sigma_2(\omega^2) = \omega^2$ et $\sigma_3(\omega^2) = -\omega^2$ et $\sigma_4(\omega^2) = -\omega^2$

et finalement pour tr $\omega^3$) = $\sigma_1(\omega^3) + \sigma_2(\omega^3) + \sigma_3(\omega^3) + \sigma_4(\omega^3)$

Où les $\sigma_i$ sont des Q-isomorphismes définies par

$\sigma_1(\omega^3) = \omega^3$ et $\sigma_2(\omega^3) = -\omega^3$ et $\sigma_3(\omega^3) = -i\omega^3$ et $\sigma_4(\omega^3) = i\omega^3$

Et donc tr $(\beta^4)$ = 1/8 [2m + 2 $a^4$] = m/4 + ($a^4$)/4 appartient à Z

Si 4 divise m alors 4 doit diviser $a^4$ et donc 2 diviserait a

Il en résulte que $\omega/2$ est un entier algébrique.

Et donc : $(\omega/2)^4$ = m/16 est aussi un entier algébrique

Ce qui implique que 16 diviserai m, et ceci est absurde car m est sans facteur d'ordre 4.

Donc : β n'est pas entier algébrique

Ce qui montre que $d_1 \neq 2$.

On conclut donc que $d_1$= 1 et puisque ω est algébrique, le choix $f_1(\omega) = \omega$ serai adéquat.

On notera aussi que $f_0(\omega) = 1$ et $d_0 = 1$ terme de la première composante de la base $B_4$

**<u>Remarque1 :</u>**

Les $f_i$ ne sont pas uniques il suffit que pour tout i les $f_i(\omega)/d_i$ soient des nombres algébriques par contre les $d_i$ sont à définir de façon uniques.

**<u>Proposition3 :</u>**

Dans la base $B_4$ (K de degré 4)

Si K est de première espèce (m ≠ ±1mod 16)

Alors on a: $f_2(\omega) = \omega^2$ et $d_2$ = hk.

De même, si K est de seconde espèce (m = ±1mod 16) on a le même résultat. .

**<u>Théorème 2 :</u>**

On a $\omega = m^{1/4} = (lh^2k^3)^{1/4}$, et on note $m' = (l^3 h^2k)^{1/4}$

On montre que $\omega^3/hk^2$ est un entier algébrique.

**<u>Preuve :</u>**

On pose $m' = (l^3 h^2k)^{1/4}$

$\omega^3/hk^2 = ((l^3h^6k^9)^{1/4})/hk^2 = (hk^2 (l^3 h^2k)^{1/4} )/hk^2 (l^3 h^2k)^{1/4}$

= m' appartient à **R**

Du fait que le terme $\omega^3$ / $hk^2$ est algébrique nous permettra à le prendre pour $f_3(\omega)/d_3$ dans le cas où m est avec facteur cubique et K de premier espèce, m ≠ ±1mod 16.

Montrons maintenant quelques résultats.

1- Pour $m = \pm 1 \bmod 16$ on pose $\beta = (\omega \pm 1)^2 /4$ on montrera que $\beta$ est algébrique.

On calcule d'abord $(\beta - 1/4)^4$ de deux façons :

(i) $(\beta - 1/4)^4 = \beta^4 - \beta^3 + 3\beta^2/8 - \beta/16 + 1/4^4$

(ii) $(\beta - 1/4)^4 = ((\omega^2 \pm 2\omega + 1)/4 - 1/4)^4 = \omega^4 /4^4 (\omega \pm 2)^4$

$= (\omega^4 /4^4) [\omega^4 \pm 8\, \omega^3 + 24\, \omega^2 \pm 32\omega + 16]$

$= (m /4^4) [m + 8(\pm \omega^3 + \omega^2) + 16(\omega^2 \pm 2\omega + 1)]$

$= (m /4^4) [\, m \pm 8( 2m\beta)^{1/2} + 16( 4\beta )\, ]$

(i) - (ii) = 0 $\iff \beta^4 - \beta^3 + (3/8)\beta^2 - \beta/16 + 1/4^4 - 1/4^4(m^2 \pm 2*4m(4m\, \beta)^{1/2} + 4^2 *4m\beta) = 0$

$\iff \beta^4 - \beta^3 + (3/8)\beta^2 - \beta/16 + 1/4^4 - 1/4^4 (m \pm 4(4m\, \beta)^{1/2} )^2 = 0$

$\iff P(\beta) = 0$

Ce qui prouve que $\beta$ appartient à **R**.

2 - Montrons que si $m = \pm 1 \bmod 16$ alors $(\omega^3 \pm k^2\, \omega^2 + k\omega + k^3) /4k$ appartient à **R**

On a : $\omega$ appartient à **R** et k appartient à **N**

Donc $(\omega^3 \pm k^2\, \omega^2 + k\omega + k^3) /4k = \omega^3 /4k + (\pm k^2\, \omega^2 + k\omega + k^3) /4k$

$(\pm k^2\, \omega^2 + k\omega + k^3) /4k = (\pm k\, \omega^2 + \omega + k^2) /4$ est algébrique comme somme de produit de termes algébriques.

Et $\omega^3 /4k$ est algébrique d'après théorème2.

D'où le résultat souhaité.

3- on montre que : $d_3$ divise 4m

On a : pour $m = \pm 1 \bmod 16$ $d_3 = hk^2$

Donc : $d_3$ divise $4\, lh^2k^3 = 4m$

On sait que $f_3(\omega)$ est un polynôme unitaire de degré 3

Donc elle s'écrit de la forme $f_3(\omega) = \omega^3 + a\omega^2 + b\omega + c$ a ; b et c éléments de **Z**

4- on suppose p premier tel que $p \neq 2$, p divise m et $p^2$ ne divise pas m.

Montrons que si p divise $d_3$ alors $(\omega^3 + a\omega^2 + b\omega + c)/ p$ appartient à **R**

Si p divise $d_3$ donc $f_3(\omega) /p = (f_3(\omega) / d_3 ) * (d_3 /p)$ appartient à **R** car $f_3(\omega) / d_3$ est un entier algébrique et $d_3 /p$ est un élément de **Z**

En suite $tr ((\omega^3 + a\omega^2 + b\omega + c)/p) = tr ((\omega^3 + a\omega^2 + b\omega)/p) + tr(c/p)$

$= tr(c/p)$ appartient à **Z** car $tr (\omega^i) = 0$

D'où : p divise c car $tr(c/p)$ appartient à **Z**

De plus $tr ((\omega^3 + a\omega^2 + b\omega)/p)$ appartient à **Z**

Donc : $(\omega^3 + a\omega^2 + b\omega)/p$ appartient à **R**

On lève ce dernier terme à la puissance 4.

$(\omega^3 + a\omega^2 + b\omega)/p)^4 = (\omega^4 /p^4)(\omega^2 + a\omega + b)^4)$

$= (m/p4) [(\omega 8 + 4a\omega 7 + 4b\omega 6 + 6\, a2\omega 6 + 12ab\omega 5 + 6b2\omega 4 + 4a3\omega 5$

$+ 12ab^2\omega^3 + 4b^3\omega^2 + 12a^2b\omega^4 + a^4\omega^4 + 4ba^3\omega^3 + 6a^2b^2\omega^2 + 4ab^3\omega + b^4\, ]$

$= (m/p^4) [(m^2 + b^4 + (4am + 12ab^2 + 4ba^3)\omega^3 + (4bm + 6a^2m + 4b^3 + 6a^2b^2)\omega^2$

$+ (12abm + 4a^3m + 4ab^3)\, \omega + m\, (6b^2 + 2a^2b + a^4)\, ]$

Donc : $p^4$ divise m ($m^2 + b^4$) ceci contredit le fait que m est sans facteur bicarré

On conclut que p ne divise pas $d_3$.

5- Soit p un nombre premier tel que $p \neq 2$ et $p^3$ divise m

Montrons que $p^3$ ne divise pas $d_3$

On a $m= lh^2k^3$

et $d_3 = hk^2$ si $m = \pm 1 \text{mod } 16$

(($= 3k$ si $m \neq \pm 1 \text{mod } 16$))

Si $p^3$ divise $lh^2k^3$ alors p divise k en effet :

$1^{re}$ cas : si p divise $lh^2$ et $p^2$ ne divise pas $lh^2$. Alors $p^2$ divise $k^3$

2° cas : si p ne divise pas $lh^2$. Alors $p^3$ divise $k^3$

Dans les 2 cas : p divise k et $p^2$ ne divise pas $d_3$

Donc pour les 2 valeurs de $d_3$. $p^3$ ne divise pas $d_3$ puisque $p \neq 2$.

6- on pose : $f_3(\omega) = \omega^3 + a\omega^2 + b\omega + c$

Montrons que : $2ab + 2c$ ; $m + b^2 + 2ac$ ; $2am + 2bc$ et $c^2 + (a^2 + 2b)$ m. sont divisibles par $d_3$

On a : $f_3(\omega) / d_3 = (\omega^3 + a\omega^2 + b\omega + c) /d_3$.

Et $d_3 = hk^2$

On calcule $(f_3(\omega)/d_3)^2$ :

$$(f_3(\omega))^2 = (\omega^3 + a\omega^2)^2 + (b\omega + c)^2 + 2(\omega^3 + a\omega^2)(b\omega + c)$$

$$= \omega^6 + a^2\omega^4 + 2a\omega^5 + b^2\omega^2 + c^2 + 2bc\omega + 2b\omega^4 + 2c\omega^3 + 2ab\omega^3 + 2ac\omega^2$$

$$= m\omega^2 + (a\omega^2 + 2b)m + 2am\omega + (b^2 + 2ac)\omega^2 + (2c + 2ab)\omega^3 + 2bc\omega + c^2$$

$$= (2ab + 2c)\,\omega^3 + (m + b^2 + 2ac)\,\omega^2 + (2am + 2bc)\,\omega + (a^2 + 2b)\,m + c^2$$

$$= P(\omega)$$

On a $f_3(\omega)/d_3$ appartient à **R** donc $(f_3(\omega)/d_3)^2$ appartient à **R**

Et donc $d_3$ divise $(f_3(\omega))^2$ puisque $(d_3)^2$ divise $(f_3(\omega))^2$

D'où : $d_3$ divise les coefficients de $(f_3(\omega))^2$

7- On suppose toujours que $f_3$ s'écrit de la forme : $f_3(\omega) = \omega^3 + a\omega^2 + b\omega + c$

On suppose que 2 divise m et $2^3$ ne divise pas m.

Montrons que 8 ne divise pas $d_3$

Par absurde supposons 8 divise $d_3$

D'après (i) 8 divise a et 8 divise b car 8 divise $f_3(\omega)$

Donc $\omega^3/8$ appartient à **R**

D'où 8 divise $\omega^3$ c à d $2^3$ divise $\omega^3$

Il vient que $2^4$ divise m.

Ceci contredit le fait que m est sans facteur bicarré

On conclut que 8 ne divise pas $d_3$.

En synthèse nous définissons les $f_i$ et $d_i$ pour i = 1, 2 et 3 annoncés dans le théorème de Daniel A.MARCUS

On utilise le lemme suivant.

**Lemme :**

Pour tout k avec $1 \leq k \leq n$ $d_k$ est le plus petit entier positif m tel que $mR_{k+1}$ contenu dans Z[ω]

Où $B_n = (1; f_1(\omega)/d_1; f_2(\omega)/d_2;\ldots; f_{n-1}(\omega)/d_{n-1})$ est une base intégrale de $A \cap Q[\omega]$

avec $\omega = (m)^{1/n}$

**Preuve :** voir référence (1)

Soit $F_k$ le groupe abélien libre de degré k engendré par $1/d, \omega/d, \ldots, \omega^{k-1}/d$

Où d = disc(ω).

On pose $R_k = R \cap F_k$ où R est l'ensemble des entiers algébriques de K = Q[ω]

**Etape 1 :**

$F_2 = Z_{1/d} + Z_{\omega/d}$

Soit $\pi_1$ la projection canonique de $F_2$ sur $Z_{\omega/d}$

$\pi_1(R_2) = \pi_1(R \cap F_2)$ est un sous groupe du groupe cyclique infini $Z_{\omega/d}$ ce qui implique que $\pi_1(R_2)$ est lui-même cyclique

fixons un certain $\beta_1$ tel que $\pi_1(\beta_1)$ engendre $\pi_1(R_2)$ et on montre que $(1, \beta_1)$ est une base dans **Z** de $R_2$.

Il suffit de montrer que $(1, \beta_1)$ est une famille libre

Supposons qu'ils existent $\mu_1$ et $\mu_2$ de Z tel que $\mu_1 + \mu_2 \beta_1 = 0$ et montrons que

$\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Si $\mu_1 + \mu_2 \beta_1 = 0$ donc $\pi_1(\mu_1 + \mu_2 \beta_1) = 0$ ce qui implique que $\pi_1(\mu_1) + \pi_1(\mu_2) = 0$

$0 + \mu_2\pi_1(\beta_1) = 0$ donc $\mu_2 = 0$ car $\pi_1(\beta_1) \neq 0$

Et donc $\mu_1 = 0$

\# Si ω est de degré 1. ω = m entier >1

Donc : R = **Z** ∩**Q** = **Z** admet une base $B_1 = (1)$

\# Si ω est de degré 2 $\omega = \sqrt{m}$ avec m sans facteur carré.

On a $B_2 = (1 ; f_1(\omega)/d_1)$ est une base avec $f_1$ et $d_1$ à définir.

Si $m \equiv 1 \pmod 4$ K de second espèce.

$f_1(\omega) = 1+ \omega$ et $d_1 = 2$ et $B_2 = (1 ; (1+\sqrt{m})/2)$ base d'entiers de K

Si $m \neq 1 \pmod 4$ K de premier espèce.

$f_1(\omega) = \omega$ et $d_1 = 1$ et $B_2 = (1 ; \sqrt{m})$ base d'entiers de K

Ce résultat est déjà démontré dans Réf(2)

\# Si ω est de degré 3 $\omega = \sqrt[3]{m}$ m sans facteur cubique. $m = hk^2$

$\omega' = \sqrt[3]{m'}$ m' sans facteur cubique. $m' = h^2k$

Montrons que $B_3 = (1 ; f_1(\omega)/d_1 ; f_2(\omega)/d_2)$ est une base avec $f_1$, $f_2$, $d_1$ et $d_2$ à définir.

On a : $\mathbf{F}_3 = \mathbf{Z}_{1/d} + \mathbf{Z}_{\omega/d} + \mathbf{Z}_{\omega^2/d}$

Soit $\pi_2$ la projection canonique de $F_3$ sur $\mathbf{Z}_{\omega^2/d}$

$\pi_2(R_3) = \pi_2(R \cap F_3)\ C\ \pi_2(R) \cap (F_k) = \pi_2(R) \cap \mathbf{Z}_{\omega^2/d}$

On a : $\mathbf{Z}_{\omega^2/d}$ est un groupe cyclique infini donc $\pi_2(R_3)$ est aussi cyclique et donc engendré par $\pi_2(\beta_2)$ pour un certain $\beta_2$ fixé de $R_3$.

De la même façon que précédemment on montre que $(1, \beta_1, \beta_2)$ est une base intégrale

(d'entiers algébriques) de $R_3$ dans **Z** $(\pi_1(\beta_1) \neq 0$ et $\pi_2(\beta_2) \neq 0)$

$\beta_1 = f_1(\omega)/d_1$ avec $f_1(\omega)/d_1 \neq 0$

$\beta_2 = f_2(\omega)/d_2$ avec $f_2(\omega)/d_2 \neq 0$

On a le résultat connu de **Dedekind** (1900) à l'ordre 3.

Ce résultat se restreint au cas m avec facteur carré $m = hk^2$

On pose $m' = h^2k$ et $\omega' = (m')^{1/3}$

Si m de premier espèce $B_3 = (1, \omega, \omega')$

Si m de second espèce $B_3 = ((1 \pm\omega + k\,\omega')/3, \omega, \omega')$

Ensuite nous énonçons les résultats de **Daniel A.MARCUS** (1973) concernant l'ordre 3.

Deux cas se présentent :

1) **Cas1** : m sans facteur carré SFC

Si $m \neq \pm 1$ mod9 K de premier espèce.

Alors $B_3 = (1, \omega, \omega^2)$

Si $m \equiv \pm 1$ mod9 K de second espèce.

Alors $B_3 = (1, \omega, (\omega^2 \pm \omega + 1)/3)$

2) **Cas2** : m avec facteur carré AFC

Si $m \neq \pm 1$ mod9 K de premier espèce.

Alors $B_2 = (1, \omega, \omega^2/k)$

Si $m \equiv \pm 1$ mod9 K de second espèce.

Alors $B_2 = (1, \omega, (\omega^2 \pm k^2\omega + k^2)/3k)$

On remarque bien que pour k=1 : le cas2 rejoint le cas1.

Nous proposons maintenant les résultats à l'ordre 4 dans un Corps K quartique pur.

# Si $\omega$ est de degré 4 $\omega = m^{1/4}$ m sans facteur d'ordre 4

Par la même démarche on montre que $(1, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ est une base intégrale de $R_4$ dans **Z**

$(\pi_1(\beta_1) \neq 0$ , $\pi_2(\beta_2) \neq 0$ et $\pi_3(\beta_3) \neq 0)$

$\beta_1 = f_1(\omega)/d_1$ avec $f_1(\omega)/d_1 \neq 0$ et $f_1(\omega) = \omega$ ; $d_1 = 1$

$\beta_2 = f_2(\omega)/d_2$ avec $f_2(\omega)/d_2 \neq 0$ et $f_2(\omega) = \omega^2$ ; $d_1 = hk$

$\beta_3 = f_3(\omega)/d_3$ avec $f_3(\omega)/d_3 \neq 0$ et $f_3(\omega) = \omega^3$ ; $d_3 = hk^2$

Nous allons proposer les expressions convenables les plus faciles suivant chaque cas.

Si m sans facteur cubique : SFCu.

- Une base d'entiers du corps quartique $Q(m^{1/4})$ est donné par :

$B_4 = (1, \omega, \omega^2, (\omega^3)/3)$

Si m avec facteur cubique : AFCu.

- Une base d'entiers du corps quartique $Q(m^{1/4})$ est donné par :

$B_4 = (1, \omega, \omega^2/hk, \omega^3/hk^2)$.

## REFERENCES

[1] Livre : Number Fields de Daniel A Marcus Théorème 13 éditions 1973
[2] Livre : Théorie algébrique des nombres de P. Samuel édition Hermann 1967
[3] Thèse de Mhammed Ziane 1998. Systèmes fondamentaux d'unités université de Laval.
[4] Mhammed Ziane. Sur le groupe des unités de corps de nombres de degré 2 et 4 Tome 19 n°3 (2007), p. 789 -798.