International Journal of Innovation and Scientific Research
ISSN 2351-8014 Vol. 21 No. 2 Apr. 2016, pp. 342-350

http://www.ijisr.issr-journals.org/

Sur Quelques Applications de la Transformation de Laplace

***MARIE CHANTAL NIYOMANZI SEBUTIMBIRI*[1], *Jean-Claude LWANZO KATCHUNGIRI*[2], *and DAVID BYAMUNGU WANGUWABO*[3-4]**

[1]Département des Techniques de Laboratoire et Santé publique,
Institut Supérieur des Techniques Médicales de Goma (ISTM/GOMA), Goma, Nord-Kivu, RD Congo

[2]Département de Mathématique-Physique,
Institut Supérieur Pédagogique de MATANDA (ISP/MATANDA), Masisi, Nord-Kivu, RD Congo

[3]Faculté des Sciences et Technologies Appliquées (FSTA),
Université Libre des Pays des Grands-Lacs (ULPGL/GOMA), Goma, Nord-Kivu, RD Congo

[4]Faculté des Sciences de l'Ingénieur (FSI),
Université du Cinquantenaire de Lwiro (UNI-50/LWIRO), Bukavu, Sud-Kivu, RD Congo

ABSTRACT: Through the paper on Laplace transformation integration published in CERIGO Journal N°2 pp. 75-86, senior lecturer David BYAMUNGU has shown basis actuality and the importance of Laplace transformation integration of some functions that do not accept usual methods integration such as integration of part and variable change; these notions being considered as one of most important mathematic theories.
In the same way, the present paper brings about and exhibits the importance of scientific interdisciplinarity showing that from transformational calculation of Laplace we can resolve problems linked with solution to problem of interdisciplinarity happening to show how transformational calculation of Laplace plays a very basic role in Mathematics (Analysis), Physics, electronics and other branches of science.

KEYWORDS: Transformation, transformation application, equations, differential equations systems, integration, oscillating systems, mechanics oscillating system, free oscillations, electric circuits.

RESUME: A travers leur article sur l'intégration la transformation de Laplace paru dans la revue du CERIGO N°2 page 75-86, le CT David BYAMUNGU WANGUWABO a montré l'actualité et l'importance de la transformation de LAPLACE dans l'intégration de certaines fonctions n'acceptant pas l'intégration par les méthodes usuelles à savoir l'intégration par partie et par changement de variable ; ces notions étant considérées comme l'une des plus élégantes de théories mathématiques.
Dans le cadre du présent article, nous voulons apporter et exhiber l'importance de l'interdisciplinarité en science en montrant qu'à partir du calcul transformationnel de LAPLACE nous pouvons résoudre les problèmes liés de l'interdisciplinarité qui se pose en montrant comment le calcul transformationnel de Laplace joue un rôle très important en mathématique (Analyse), en physique, en électronique et dans d'autres branches de la science.

MOTS-CLEFS: Transformation, application de la transformation, équations, systèmes d'équations différentielles, intégration, système oscillant, oscillations mécaniques, oscillations libres, circuits électriques.

1 INTRODUCTION

A travers leur article sur l'intégration la transformation de Laplace paru dans la revue du CERIGO N°2 page 75-86, le CT David BYAMUNGU WANGUWABO a montré l'actualité et l'importance de la transformation de LAPLACE dans l'integration de certaines fonctions n'acceptant pas l'intégration par les méthodes usuelles à savoir l'intégration par partie et par changement de variable ; ces notions étant considérées comme l'une des plus élégantes de théories mathématiques.

Dans le cadre du présent article, nous voulons apporter et exhiber l'importance de l'interdisciplinarite en science en motrant qu'à partir du calcul transformationnel de LAPLACE nous pouvons résoudre les problemes lié de l'interdisciplinarité qui se pose en montrant comment le calcul transformationnel de Laplace joue un rôle très important en mathématique (Analyse), en physique, en électronique et dans d'autres branches de la science.

Nous nous sommes servis des résultats de notre premier article évoqué ci-haut pour démontrer quelques applications de la transformation de Laplace en mathématique (Analyse : précisément dans la résolution des équations différentielles linéaires et des systèmes d'équations différentielles) et en physique dans la résolution des équations différentielles des systèmes oscillants. Pour ce dernier cas, les problèmes étant délicats, nous avons étudié d'une manière détaillée quelques cas concrets en nous attachant à dégager la méthode générale qui, du reste, présidera à leur résolution et pourra aisément être transposée à d'autre cas.

Pour arriver à atteindre notre objectif qui est celui de montrer l'utilité des mathématiques dans certaines branches connexes de science, nous avons utilisé la méthode axiomatique qui nous a permis de développer certaines démonstrations et certains exemples. Celle-ci a été appuyée par la technique documentaire : celle-ci nous a permis de parcourir certains ouvrages afin de constituer la théorie du présent article.

2 METHODES ET RESULTATS

2.1 APPLICATION DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE EN ANALYSE MATHEMATIQUE

En analyse mathématique, la résolution des équations différentielles et des systèmes d'équations différentielles est donnée de la manière suivante :

- on cherche d'abord la solution générale de l'équation

$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x(t) = 0$ (1) contenant n constantes arbitraires,

- Ensuite on détermine les constantes de manières que les conditions initiales $x(0) = x_0,\ x'(0) = x'_0, \dots, x^{n-1}(0)$x(0)=$x_0$, x'(0)=$x_0$,..., $x^{n-1}(0)=x_0^{n-1}$ (2) soient vérifiées.

Cette méthode de résolution parait difficile et fastidieux ; nous proposons pour cet effet une méthode plus simple basée sur la transformation de Laplace de la manière suivante :

- on cherche l'image L de la solution de l'équation (1) vérifiant les conditions(2). Désignons cette image L par ainsi $\bar{x}(s)$; ainsi $\bar{x}(s) \to S$(t).

Supposons que l'image de la solution de l'équation (1) ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n inclus existe (une fois la solution trouvée, nous pouvons vérifier la validité de cette supposition).

– Multiplions les deux membres de l'égalité (1) $par\ e^{-st}$ où s=a+ib et intégrons entre les limites 0 et ∞ :

$$a_0 \int_0^\infty e^{-st} \frac{d^n x}{dt^n} dt + a_1 \int_0^\infty e^{-st} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} dt + \cdots + a_n \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (3)$$

Dans le premier membre de (3) nous avons l'image L de la fonction x(t) et de ses dérivées, dans le second membre l'image L de la fonction f(t) que nous désignons par F(s). Ainsi (3) peut se mettre sous la forme :

$$a_0 L\left[\frac{d^n x}{dt^n}\right] + a_1 L\left[\frac{d^{n-1} x}{dt^n}\right] + \cdots + a_n L[x(t)] = L[f(t)]$$

Remplaçons dans cette égalité les images de la fonction et de ses dérivées par les expressions suivantes :

1) Si F(s) → f(t) alors sF(s)-f(0) → f'(t).
2) s$[sF(s) - f(0)] - f'(0)$ →f''(t)⟺ $s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \to f''$(t)

3) $s^nF(s) - \left[s^{n-1}f(0) + s^{n-2}f'(0) + \cdots + sf^{(n-2)}(0) + \cdots + f^{(n-1)}(0)\right] \to f^{(n)}$(t).

On obtient :

$a_0\{s^n\bar{x}(s) - [s^{n-1}x_0 + s^{n-2}x'_0 + s^{n-3}x''_0 + \cdots x_0{}^{n-1}]\} + a_1\{s^{n-1}\bar{x}(s) - [s^{n-2}x_0 + s^{n-3}x'_0 + s^{n-4}x''_0 + \cdots x_0{}^{n-2}]\} + a_{n-1}\{s\bar{x}(s) - x_0\} + a_n\bar{x}(s) = F(s)$

Cette équation (4) est appelée équation auxiliaire ou équation image d'inconnue l'image $\bar{x}$(s) que l'on peut déterminer à partir même de cette équation. Transformons cette équation en laissant dans le premier membre les termes contenant $\bar{x}$(s) :

$[a_0s^n + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n]\bar{x}(s) = a_0[s^{n-1}x_0 + s^{n-2}x'_0 + \cdots + x_0{}^{n-1}] + a_1[s^{n-2}x_0 + s^{n-3}x'_0 + \cdots + x_0{}^{n-2}] + a_{n-2}[sx_0 + x'_0] + a_{n-1}x_0 + F(s)$ (4')

Le coefficient de $\bar{x}(s)$ dans le premier de (4') est un polynôme en S d'ordre n que l'on peut obtenir si dans le premier membre de l'équation (1), on remplace les dérivées par les puissances correspondantes de S. Désignons-le par: $P_n(s)$, on a :

$P_n(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$ (5)

Le second membre de (4) est ainsi composé:

- le coefficient a_{n-1} est multiplié par $x_{o,}$
- Le coefficient a_{n-2} est multiplié par $sa_0 + x'_0$,…
- Le coefficient a_1 est multiplié par : $s^{n-2}x_0 + s^{n-3}x'_0 + \cdots + x_0{}^{n-2}$,
- Le coefficient a_0 est multiplié par $s^{n-1}x_0 + s^{n-2}x'_0 + \cdots + x_0{}^{n-1}$.

On obtient alors un polynôme en S de degré n-1 dont les coefficients sont connus. On a:

$P_n(s)\bar{x}(s) = P_{n-1}(s) + F(s) \Rightarrow \bar{x}(s) = \frac{P_{n-1}(s)}{P_n(s)} + \frac{F(s)}{P_n(s)}$ (5)

D'où $\bar{x}(s)$ est l'image de la solution x(t) de l'équation (1) vérifiant les conditions initiales. Si on trouve une autre fonction x*(t) dont l'image est $\bar{x}(s)$ définie par l'égalité (6) c'est-à-dire que x*(t)=x(t).

Remarque : Si les conditions initiales sont telles que x_0=x'_0=$x''_0 = \cdots = x_0^{n-1} = 0$ alors $P_{n-1}(s) = 0$.

D'où $\bar{x}(s) = \frac{F(s)}{P_n(s)}$ ou $\bar{x}(s) = \frac{F(s)}{a_0s^n + a_1s^n + \cdots + a_n}$ (6')

A. Exemple de résolution des équations différentielles linéaires par la méthode de la transformation de Laplace

Exemple$_1$: Trouver la solution de l'équation $\frac{dx}{dt} + x = 1$ vérifiant les conditions initiales x_0=0 pour t=0.

Solution : Equation auxiliaire $(s+1)\bar{x}(s)$ =0+$\frac{1}{s}$ (car$\frac{1}{s} \to 1$)

$\Leftrightarrow \bar{x}(s) = \frac{1}{s.}$.

En décomposant la fraction du second membre en éléments simples, on obtient : $\bar{x}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$.

En s'appuyant sur le fait que F(s)=L[f(x)]= $\frac{1}{s}$ alors f(t)= L^{-1}[F(s)]=1 et F(s)=L[f(x)]= $\frac{1}{s+a}$ et f(t)= L^{-1}[F(s)]=e^{-at}.

On a : x(t)=1-e^{-t}.

Exemple$_2$: Trouver la solution de l'équation $\frac{d^2x}{dt^2}$+9x=1 avec x_0=x'_0=0 pour t=0.

Solution : x_0=x'_0=0 pour t=0 ⇔ $P_{n-1}(s) = 0$ par définition. Ecrivons l'équation auxiliaire: $(s^2+1)\bar{x}(s)$ =$\frac{1}{s}$ ⇔ $\bar{x}(s) = \frac{1}{s(s^2+9)}$.

Si F(s)=L[f(x)]= $\frac{1}{s(s^2+a^2)}$ alors f(t)= L^{-1}[F(s)]=$\frac{1}{a^2}(1 - cosat)$,

On trouve x(t)=$\frac{1}{9}(1 - cos3t)$ x(t)=$\frac{1}{9}$-$\frac{1}{9}cos3t$.

Exemple$_3$:Trouver la solution de l'équation : $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = t$ avec x_0=x'_0=0 pour t=0.

Solution : P_{n-1}(s)=0. Ecrivons l'équation auxiliaire : $(s^2+3s+2)\bar{x}(s)$ =$\frac{1}{s^2}$ *ou* $\bar{x}(s)$ =$\frac{1}{s^2}.\frac{1}{s^2+3s+2}$ =$\frac{1}{s^2(s+1)(s+2)}$

Décomposons cette fraction en éléments simples:

$\frac{1}{s^2(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{Cs+D}{s^2}$

$\bar{x}(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{4(s+2)} + \frac{-\frac{3}{4}s+\frac{1}{2}}{s^2}$

$\bar{x}(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{4(s+2)} - \frac{3}{4}.\frac{1}{s} + \frac{1}{2}.\frac{1}{s^2}$

D'où, $x(t) = e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}t$

Exemple$_4$: Trouver la solution de l'équation: $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = sint$, avec x_0=1, x'_0=2 pour t=0

Solution : $P_{an}(s)=s^2+2S+5 \Rightarrow P_{n-1}(s)=1.(s.1+2)+2(1)=s+4$

l'équation auxiliaire $(s^2+2s+5)\bar{x}(s) = s + 4 + L[sint]$ ou L[sint]=$\frac{1}{s^2+1}$

D'où $\bar{x}(s) = \frac{s+4}{s^2+2s+5} + \frac{1}{(s^2+1)(s^2+2s+5)}$.

Décomposons la dernière fraction du second membre en éléments simples, on écrit :

$\overline{x}(s) = \frac{s+4}{s^2+2s+5} + \frac{-\frac{1}{10}s+\frac{1}{s}}{s^2+1} + \frac{\frac{1}{10}s}{s^2+2s+5}$.

$\bar{x}(s) = \frac{11s+11}{10(s^2+2s+5)} + \frac{29}{10(s^2+2s+5)} - \frac{1}{10}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{5}\frac{1}{(s^2+1)}$.

D'où x(t)=$\frac{11}{10}e^{-t}cos2t + \frac{29}{20}e^{-t}sin2t - \frac{1}{10}cost + \frac{1}{5}sint$

x(t)=$e^{-t}(\frac{11}{10}cos2t + \frac{29}{20}sin2t) - \frac{1}{10}cost + \frac{1}{5}sint$

Exemple$_5$: Trouver la solution de l'équation $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = sin3x$, pour x_0=0, x'_0=0 pour t=0.

Solution: x_0=x'_0=0 pour t=0 $\Rightarrow$ $P_{n-1}(s) = 0$

Composons l'équation auxiliaire $(s^2+4)\bar{x}(s) = L[sin3t]$

D'où $(s^2+4)\ \bar{x}(s) = \frac{3}{s^2+9} \Rightarrow \bar{x}(s) = \frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}$.

En décomposant en éléments simples, on trouve :

$\bar{x}(s) = \frac{\frac{3}{5}}{s^2+4} + \frac{-\frac{3}{5}}{s^2+9} = \frac{3}{5}\frac{1}{s^2+4} - \frac{3}{5}\frac{1}{s^2+9}$.

D'où L[f(t)]=$\frac{1}{S^2+a^2}$=F(s) et L^{-1}[F(s)]=f(t)=$\frac{1}{a}$sinat on a :

$\bar{x}(s) = \frac{3}{10}sin2t - \frac{1}{5}sin3t$

Exemple$_6$ - : Trouver la solution de l'équation $\frac{d^3x}{dt^3} + 4x = 0$ verifiant les conditions initiales x_0=1, x'_0=3, x''_0=8 pour t=0

Solution: $P_n(s) = s^3+1$

$P_{n-1}=1.(s^2.1+s.3+8)=s^2+3s+8$.

L'équation auxiliaire sera alors $(s^3+1)\bar{x}(s)=s^2+3s+8$.

D'où $\bar{x}(s)=\frac{s^2+3s+8}{s^3+1}=\frac{s^2+3s+8}{(s+1)(s^2-s+1)}$

En décomposant la fraction rationnelle obtenue en éléments simples, on a : $\bar{x}(s)=\frac{2}{s+1}+\frac{-s+6}{s^2-s+1}=\frac{2}{s+1}-\frac{s-6}{s^2-s+1}$ ou $\bar{x}(s)=\frac{2}{s+1}-\frac{s-\frac{1}{2}-\frac{11}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}}$

$\bar{x}(s)$=2.$\frac{1}{S+1}$-$\left[\frac{s-\frac{1}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\frac{\frac{11}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right]$

$\bar{x}(s)=2.\frac{1}{S+1}-\frac{S-\frac{1}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{11}{2}\frac{1}{(S-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$

Donc x(t)=2$e^{-t}-e^{\frac{1}{2}t}cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{11}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$

D'où x(t)=2$e^{-t}+e^{\frac{1}{2}t}\left(-cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{11}{\sqrt{3}}sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

N.B : La méthode s'applique à toutes les équations linéaires à coefficients constants, aussi compliquées soient-elles, et aux équations linéaires à coefficients variables.

B. Quelques exemples de résolution des systèmes d'équations différentielles par la méthode de la transformée de Laplace

1. Trouver la solution du système d'équations différentielles :

$\begin{cases}2\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-4x-y=e^t & (1)\\ \frac{dx}{dt}+3x+y=0, & (2)\end{cases}$ vérifiant les conditions initiales x=0, y=0 pour t=0.

Désignons par x(t)← $\bar{x}(s)$et y(t)← $\bar{y}(s)$ et écrivons le système d'équations auxiliaires :

$\begin{cases}(2s-4)\bar{x}(s)+(s-1)\bar{y}(s)=\frac{1}{s-1} & (3)\\ (s+3)\bar{x}(s)+\bar{y}(s)=0, & (4)\end{cases}$

En multipliant (4) par (s-1) on trouve $(s^2+2s-3)\bar{x}(s)+(s-1)\bar{y}(s)=0\quad(5)$ faisant (3)-(5) donne :$-(s^2+1)\bar{x}(s)=\frac{1}{s-1}$

$\Rightarrow\bar{x}(s)=\frac{-1}{(s-1)(s^2+1)}$

D'où x(t)=$-\frac{1}{2}-(e^t-cost-sint)$, ensuite nous tirons

$\bar{y}(s)=-(s+3).\bar{\mathrm{x}}(\mathrm{t}).\frac{-1}{(s-1)(s^2+1)}$

$=-(s+3).\frac{-1}{(s-1)(s^2+1)}\;=\frac{s+3}{(s-1)(s^2+1)}$

$=\frac{s}{(s-1)(s^2+1)}+\frac{3}{(s-1)(s^2+1)}$

D'où y(t)=$\frac{1}{2}.[Sint+(e^t-cost)]+\frac{3}{2}[e^t-cost-sint]$

$y(t)=-sint-2cost+2e^t)$

Les solutions cherchées du système sont donc

x(t) $=\frac{1}{2}sint-\frac{1}{2}cost-\frac{1}{2}e^t$

y(t) $=-sint-2cost+2e^t$

2) Trouver la solution du système d'équation :

$\begin{cases}3\frac{dx}{dt}+2x+\frac{dy}{dt}=1 & (1)\\ \frac{dx}{dt}+4\frac{dy}{dt}+3y=0 & (2)\end{cases}$ vérifiant les conditions initiales x=0, y=0 pour t=0.

Solution : Désignons par x(t)← $\bar{x}(s)$

y(t)← $\bar{y}(s)$ et écrivons le système d'équations auxiliaires :

$\begin{cases}(3s+2)\bar{x}(s)+S\bar{y}(s)=\frac{1}{s} & (3)\\ s\bar{x}(s)+(4s+3)\bar{y}(s)=0, & (4)\end{cases}$

En résolvant ce système, nous trouvons :

$\bar{x}(s) = \frac{4s+3}{s(s+1)(11s+6)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{5(s+1)} - \frac{33}{10(11s+6)}$,

$\bar{y}(s) = -\frac{1}{(11s+6)(S+1)} = \frac{1}{5}(\frac{1}{s+1} - \frac{11}{11s+6})$

Ou encore $\begin{cases} \bar{x}(s) = \frac{1}{2}.\frac{1}{s} - \frac{1}{5}.\frac{1}{s+1} - \frac{3}{10}.\frac{1}{s+\frac{6}{n}} \\ \bar{y}(s) = \frac{1}{5}(\frac{1}{S+1} - \frac{1}{S+\frac{6}{n}} \end{cases}$

On sait que si F(s)=$\frac{1}{S}$ alors f(t)=$\frac{1}{2} - \frac{1}{5}L^{-1}[F(s)] = 1$, F(s)=$\frac{1}{S+a}$ alors f(t)= $L^{-1}[F(s)] = e^{-at}$.

D'où ces solutions deviennent $x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{3}{10}e^{-\frac{6}{n}t}$

y(t)=$\frac{1}{5}\left(e^{-t} - e^{-\frac{6}{n}t}\right)$

Signalons que les systèmes linéaires d'ordre supérieur se résolvent de la même manière

2.2 APPLICATION DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE EN PHYSIQUE

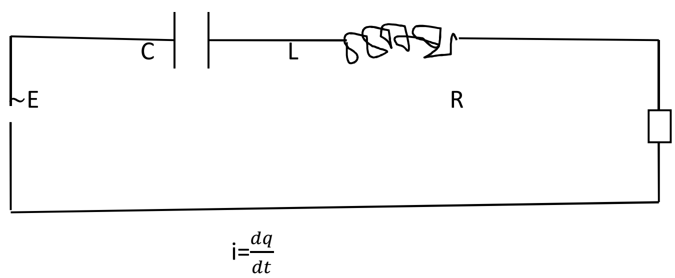
2.2.1 ETUDE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES OSCILLATIONS MECANIQUES- EQUATIONS DIFFERENTIELLES DE LA THEORIE DES CIRCUITS ELECTRIQUES

Nous savons de la mécanique que les oscillations d'un point matériel de masse m sont décrites par l'équation :

$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}f_1(t) \qquad (1)$

Ou x désigne l'écart du point (l'élongation) d'une certaine position, k la rigidité du système élastique (par exemple du ressort), **λ** le coefficient de viscosité.

La solution d'une équation du type(1) décrit également les petites oscillations d'autres systèmes mécaniques à un degré de liberté, par exemple les vibrations de torsion du volant sur un arbre flexible si x est l'angle de rotation du volant, m le moment d'inertie du volant, k la rigidité à la torsion de l'ordre et $\frac{1}{m}f_1(t)$ le moment des forces extérieures par rapport à l'axe de rotation. (1) décrit aussi les phénomènes se déroulant dans les circuits électrique d'une. Soit un circuit électrique, compose d'une inductance L, d'une résistance R capacité C, auquel est appliquée une force électromotrice E.



Désignons par i le courant dans le circuit et Q la charge du condensateur. Alors i et Q vérifient les équations suivantes :

$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{c} = E \qquad (2), \quad \frac{dq}{dt} = i \quad (3)$ c'est la loi d'Ampère.

De (3) on a : $\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{di}{dt} \quad (3')$.

Portant (3) et (3') dans (2), on obtient:$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = E \quad (4)$.

Signalons que (4) et (5) sont des types (1)

2.2.2 RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE DES OSCILLATIONS

L'équation des oscillations peut se mettre sous forme :

$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_2 x = f(t)$ (6) où le sens la mécanique ou physique de la fonction recherchée x, des coefficients a_1, a_2 et de la fonction f(t) est aisément établie en la comparant avec les équations (1), (4), (5).

$x = x_0$, $x' = x'_0$ Trouvons la solution de (6) vérifiant les conditions initiales pour t=0. L'équation auxiliaire pour (6) est : $(s_2+a_1s+a_2)\bar{x}(s)=x_0s+x'_0+a_1x_0+F(s)$ (7) où F(s) est l'image de f(t).

D'où $\bar{x}(s)=\frac{x_0s+x'_0+a_0x_0}{s^2+a_1s+a_2}+\frac{F(s)}{s^2+a_0s+a_2}$ (8)

Ainsi pour la solution q(t) de l'équation (4) vérifiant les conditions initiales $q=q_0$, $q'=q'_0$ pour t=0, l'image sera de la forme :

$\bar{Q}(s) = \frac{L(Q_0s+Q'_0)+RQ}{Ls^2+Rs+\frac{1}{C}} + \frac{\bar{E}(s)}{Ls^2+Rs+\frac{1}{C}}$

La solution dépendra donc de $s_1^2 + a_1s + a_2$ racines de selon qu'elles sont complexes, réelles et distinctes ou réelles et égales.

Si les racines sont complexes, c'est-à-dire $(\frac{a_1}{2})^2 - a_2 < 0$

De (8) : $\bar{x}(s) = \frac{x_0s+x'_0+a_1x_0}{s^2+a_1s+a_2} + \frac{F(s)}{s^2+a_1s+a_2}$ mais

$s^2+a_1s+a_2=(s+\frac{a_1}{2})^2+(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}})^2$

$\Rightarrow\ \bar{x}(s) = \frac{x_0}{(s+\frac{a_1}{2})^2+(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}})^2} + \frac{x'_0+a_1x_0}{Ls^2+Rs+\frac{1}{C}} + \frac{F(s)}{(s+\frac{a_1}{2})^2+(\sqrt{a_{1-\frac{a_1^2}{4}}})}$

Comme l'image de la somme des fonctions est égale à la somme de leurs images et en vertu du fait que si F(s)=L$[f(t)]=\frac{s}{(s+a)^2+b^2}$ alors f(t)=$L^{-2}[F(s)] = \frac{1}{b}e^{-at}(bcosbt - asinbt)$ *et si* $F(s) = L[f(t)] = \frac{1}{a^2+(s+b)^2}$ alors $L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{a}e^{-bt}.asinbt$ (⋆), on trouve : $\frac{x_0s}{(s+\frac{a_1}{2})^2+(\sqrt{a_2-\frac{a_1}{4}})^2} \to x_0e^{\frac{-a_1}{2}t}cos\sqrt{a_1-\frac{a_1^2}{4}t}\ \text{-}\frac{x_0}{\sqrt{a_1-\frac{a_1^2}{4}}}e^{-\frac{a_1}{2}t}.\frac{a_1}{2}sin\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}t$

$\frac{x'_0+x_0s}{(s+\frac{a_1}{2})^2+(\sqrt{a_2-\frac{a_1}{4}})^2} \to x'_0 + a_0x_0\frac{x_0}{\sqrt{a_1-\frac{a_1^2}{4}}}e^{-\frac{a_1}{2}t}.\frac{a_1}{2}sin\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}t$

$\Longrightarrow \frac{x_0s+x'_0+a_1x_0}{s^2+a_1s+a_2} \to e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[x_0cos\sqrt{a_1-\frac{a_1^2}{4}t} + \frac{x'_0+\frac{a_1x_0}{2}}{\sqrt{a_1-\frac{a_1^2}{2}}}.e^{-\frac{a_1}{2}t}sin\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}t}\right]$ (1)

Pour trouver alors l'originale correspondant à on utilise le théorème de convolution (2. p.58) en remarquant que F(s)→f(t) et $\frac{1}{s^2+a_1s+a_2} \to \frac{e^{-\frac{a_\&}{2}t}}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}\int_0^t f(\theta)sin\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}(t-\theta)d\theta$ (10)

Nous obtenons ainsi de (8) en tenant compte de (s) et (1) :

X(t)=$e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[x_0cos\sqrt{a_1-\frac{a_1^2}{4}}t + \frac{x'_0+\frac{a_1x_0}{2}}{\sqrt{a_1-\frac{a_1^2}{2}}}e^{-\frac{a_1}{2}t}sin\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}t\right]+\frac{e^{-\frac{a_\&}{2}t}}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}\int_0^t f(\theta)sin\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}(t-\theta)d\theta$ (11)

Si f(t)=0 c'est-à-dire nous avons des oscillations mécaniques ou électriques libres, la solution est donnée par le 1er terme du second membre de (11) Si x_0=$x'_0 = 0$, alors la solution sera le second terme du second membre de (11).

2.2.3 ETUDE DES OSCILLATIONS LIBRES

Supposons que (6) décrit les oscillations libres c'est-à-dire que f(t)=0.

Si a_1=2n, a_2=k^2, k_1^2 =k^2-n^2 (6) devient : $\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = 0$ (12)

La solution de cette équation est donnée par :

x_1(t)=$e^{-nt}\left[x_0 cosk_1 t + \frac{x_0' + x_0^n}{k_1} sink_1 t\right]$ (13)

(Pour x=x_0, x'=x'$_0$ pour t=0) Posons x_0=a, $\frac{x_0'+x_0 n}{k_1}$ =0. Il est évident qu'en choisissant M et s de sorte que a=Msinδ alors M^2=a^2+b^2, tanδ=$\frac{a}{b}$ (13) s'écrit alors : x_1=$[Mcosk_1 tsin\delta + Msink_1 tcos\delta]$ d'où x_1= $\sqrt{a^2+b^2}e^{-nt}sin(k_1 t + \delta)$ (15)

La solution (14) correspond enfin aux oscillations amorties. Si 2n=a_1=0 ie l'on néglige le frottement interne alors x_1= $\sqrt{a^2+b^2}e^{-nt}sin(k_1 t + \delta)$, On parle des oscillations harmoniques simples, oscillations libres non amorties.

2.2.4 ETUDE DES OSCILLATIONS FORCEES DANS LE CAS D'UNE FORCE EXTERIEURE PERIODIQUE

Supposons que (6) soit de la forme : $\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = Asin\omega t$ (15) si x=x_0=0 pout t=0, l'équation image est : (s^2+2ns+k^2)$\bar{x}(s) = A\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$\Longrightarrow \bar{x}(s) = \frac{A\omega}{(s^2+2ns+k^2)(s^2+\omega^2)}$ (16)

Considérons le cas où 2n≠0 et décomposons la fonction en fractions simples.

$\frac{A\omega}{(s^2+2ns+k^2)(s^2+\omega^2)} = \frac{Ns+B}{s^2+2ns+k^2} + \frac{Cs+D}{s^2+\omega^2}$ (17)

Par un raisonnement analogue à celui de la recherche de (8) et en s'appuyant sur (*) on a :

x(t)= $\frac{A}{(k^2-\omega^2)+4n^2\omega^2)}\left\{(k^2-\omega^2)sint - 2n\omega cos\omega t + e^{-nt}\left[(2n^2-k^2+\omega^2)\frac{\omega}{k_1}sin\omega k_1 + 2n\omega cosk_1 t\right]\right\}$ (18), ici $k_1 = \sqrt{k^2-n^2}$. Ceci est précisément la solution de (15) vérifiant x=x_0=0 pout t=0. Si 2n=0 c'est-à-dire :

- pour un système mécanique, il n'ya pas résistance interne, pas d'amortissement.

– pour un circuit électrique, cela correspond au cas où R=0.

De l'équation (15) : $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = Asin\omega t$ (19) vérifiant x=x_0=0 pour t=0.

x(t)= $\frac{A}{(k^2-\omega^2))}\left[(2n^2-k^2+\omega^2)\frac{\omega}{k_1}sin\omega k_1 + 2n\omega cosk_1 t\right]$ (20)

Nous avons ainsi la somme de deux oscillations harmoniques.

- Les oscillations propres de fréquence : $x(t)_{forcée}$= $\frac{A}{(k^2-\omega^2))}\frac{\omega}{k}$ sinωt

- Les oscillations forcées de fréquence : x(t)= $\frac{A}{(k^2-\omega^2)}sin\omega t$

2.2.5 SOLUTION DE L'EQUATION DES OSCILLATIONS DANS LE CAS DE LA RESONANCE

Considérons le cas particulier où a_1=2n=0 et k=ω c'est-à-dire que la résistance est nille, et la fréquence de la force extérieure coïncide avec la fréquence des oscillations propres. L'équation est alors

$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = Asin\omega t$. Pour vérifiant x=x'$_0$=0 pour t=0, l'équation auxiliaire sera (s^2+k^2)$\bar{x}(s) = A\frac{k}{s^2+k^2}$

d'où $\overline{x}(s) = A\frac{k}{(s^2+k^2)^2}$.

D'après la linéarité de la transformation de Laplace et du fait que si F(s)=L$[f(t)] = \frac{1}{(s^2+k^2)^2}$

Alors f(t)=$L^{-1}[\mathrm{F(s)}] = \frac{1}{2a^3}(sinat - atcosat)$ alors$\frac{Ak}{(s^2+k^2)^2} \longrightarrow \frac{A}{2k}(\frac{1}{k}sinkt - tcoskt)$ (21)

Le second terme de cette solution, c'est-à-dire $x_2(t)=-\frac{A}{2k}tcos\omega t$, prouve que l'amplitude indéfiniment lorsque t→ ∞, ce phénomène a lieu lorsque la fréquence des oscillations propres coïncide avec la fréquence de la force extérieure et est appelé résonance.

3 CONCLUSION

Au terme de notre travail sur la transformation de Laplace en Mathématique (Analyse mathématique) et en Physique (phénomènes ondulatoires), nous avons prouvé l'interdisciplinarité entre les sciences qui d'une part :

* Dans l'application mathématique de la transformation de Laplace, nous avons résolu les équations et systèmes d'équations en dégageant des nombreux avantages de cette méthode par rapport à la résolution ordinaire des équations différentielles. Nous avons montré qu'à travers cette méthode, la résolution se fait en trois moments :

- Tout d'abord l'équation différentielle est transformée en une équation algébrique,
- Ensuite cette équation ou système différentiel est transformée en un système est résolu algébriquement,
- Enfin la solution de l'équation transformée est transformée à nouveau pour fournir la solution de l'équation ou système de départ. Il s'agit de l'opération inverse. En fait la transformation de Laplace réduit un problème différentiel linéaire à un problème d'algèbre linéaire ; avec un avantage que cette méthode tient compte des conditions initiales sans avoir déterminé une solution générale et ensuite particulière comme d'ordinaire. On obtient tout de suite la solution d'une équation différentielle non homogène. Ajoutons qu'avec les formules de transformation de Laplace, cette méthode devient de plus en plus rapide.

** D'autre part, la même étape en (*), nous avons trouvé la solution aux équations différentielles des mouvements oscillatoires, ce qui est, d'une manière rapide, venu résoudre un problème en physique.

Nous ne prétendons pas avoir épuisé les applications de ces transformées ni en avoir produit une œuvre parfaite, car celles-ci peuvent s'appliquer à la résolution des équations aux dérivées partielles, des équations intégrales et intégro-différentielles, des fonctions périodiques, des fonctions de deux variables,….

REFERENCES

[1] P. FLORENT, Equations et systèmes différentiels, Vuibert, Paris 1977.
[2] ALONSO-FINN, Physique, Mécanique T_1, Inter Editions, Paris 1979.
[3] ROGER LE GROS, Calcul transformationnel, Masso et science) Paris 1974.
[4] B.CALVO, Cours d'Analyse IV, Fonctions de plusieurs variables, systèmes différentiels, Armand Colin, Paris 1977.
[5] PISKOUNOV, Calcul différentiel et intégral T_2, Mir Moscou, 1974.
[6] MAURICE DENIS-PAPIN, Mathématiques générales, Dunod, Paris 1975.