

## Extension anisotherme des critères pour la fatigue polycyclique isotherme

### [ Anisothermal extension of criteria for isothermal high cycle fatigue ]

*Kévin M. Tsapi Tchoupou<sup>1</sup>, Bertin D. Soh Fotsing<sup>1</sup>, and Alexis Kuitche<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Department of Mechanical Engineering,  
IUT Fotso Victor–University of Dschang,  
P.O. Box 134 Bandjoun, Cameroon

<sup>2</sup>Department of GEEA,  
ENSAI–Université de N’Gaoundéré,  
P.O. Box 455 Ngaoundere, Cameroun

---

Copyright © 2015 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

**ABSTRACT:** In many situations encountered in engineering practice, structures or structural elements are under thermomechanical cycles of loading. The use in this condition of traditional fatigue criteria in high cycle fatigue is no more advisable because on structures, these criteria are formulated for the prediction of the number of cycles for the nucleation of cracks in the isothermal situation. In this paper, we propose an extension of stress invariants based criteria, for the anisothermal high cycle fatigue. Our proposal is essentially based on the hypothesis of accommodation at macroscopic and microscopic levels. The simulation made from the fatigue strength of the proposed anisothermal criterion reproduced qualitatively the expected results. The proposed modified criteria will enhance the account of the multiaxial and anisothermal character of thermomechanical loadings.

**KEYWORDS:** thermomechanical fatigue, Crossland, fatigue limit, accommodation, fatigue strength.

**RESUME:** Dans beaucoup de situations couramment rencontrées en ingénierie, les structures ou éléments de structures sont soumis à des chargements thermomécaniques cycliques. L’utilisation dans ces conditions des critères traditionnels en fatigue polycyclique n’est plus indiquée, car ils sont formulés pour la prédiction sur structure de l’amorçage de fissure de fatigue dans le cas isotherme. Dans cet article, nous proposons une extension des critères de l’approche par invariants de contraintes pour la fatigue polycyclique anisotherme. La proposition est essentiellement fondée sur l’hypothèse d’adaptation aux échelles macroscopique et mésoscopique. Les simulations faites à partir de la fonction de fatigue du critère anisotherme proposé reproduisent qualitativement les résultats attendus. Les critères ainsi proposés permettront une prise en compte du caractère multiaxial et anisotherme des chargements thermomécaniques.

**MOTS-CLEFS:** fatigue thermomécanique, Crossland, limite d’endurance, adaptation, fonction de fatigue.

## 1 INTRODUCTION

Les critères en fatigue polycyclique des métaux ont historiquement été formulés pour la prédiction sur structure de l’amorçage de fissures de fatigue dans le cas isotherme. Dans le cas de chargements multiaxiaux cycliques thermomécaniques ou anisothermes, le comportement du matériau est en général élastoplastique ou viscoplastique.

Comme le indiqué par [1], [2], Il devient assez difficile de généraliser les critères classiques de la fatigue polycyclique pour prendre en compte les effets de la température.

D’après [3], les structures soumises à des chargements cycliques présentent différents types de comportement asymptotique: l’adaptation, l’accommodation ou le rochet. Lorsque la structure soumise à des chargements anisotherme endure un grand nombre de cycles, les déformations plastiques se stabilisent et le comportement cyclique redevient purement élastique avec apparition de contraintes résiduelles. On parle alors d’adaptation élastoplastique. Ce comportement est à la base de phénomènes de fatigue à grand nombre de cycles.

Les critères en fatigue polycyclique sont traditionnellement utilisés pour la prédiction sur structure de l’amorçage de fissure de fatigue dans le cas isotherme. Ils peuvent être utilisés pour les chargements thermiques lorsque les variations de température influent peu sur les caractéristiques du comportement en fatigue à grand nombre de cycles des matériaux constitutifs [4], [5].

Les problèmes de structures soumises à des chargements thermomécaniques sont nombreux: moteurs, réacteurs, rail soumis au roulement d’une roue, pneu soumis à la pression de la route, engrenages, disque de frein, courroie de distribution, pompes à chaleur, [1], [6]. Ces chargements thermomécaniques produisent des écarts de températures dont l’influence est non négligeable sur les caractéristiques de la fatigue du matériau. Pour toute prédiction fiable de la tenue en fatigue, cette influence doit être prise en compte.

Une approche multi-échelle des critères de fatigue polycyclique a été proposée voir [4], puis reprise [4]. Cette approche permettait une généralisation des critères de Dang Van et de Papadopoulos aux chargements anisotherme.

Le critère de Crossland [7] largement utilisé en fatigue polycyclique isotherme à cause de sa mise en œuvre assez simple, est construit tout comme les critères de Dang Van et de Papadopoulos à partir de la combinaison linéaire de deux paramètres, dont la pression hydrostatique maximale. Nous exploitons les résultats obtenus dans les travaux précédant [4], [5] pour proposer une reformulation du critère de Crossland dans le cas de structures subissant des chargements cycliques anisotherme. Les modèles sont validés par simulation numérique sur le cas d’une éprouvette encastrée et soumise à des cycles thermiques.

**2 DESCRIPTION DE L’APPROCHE ISOTHERME – ANISOTHERME**

L’extension anisotherme des critères de Dang Van et Papadopoulos [4] repose sur l’utilisation de la condition locale d’adaptation écrite dans le cas anisotherme, voir [8]. Plus Concrètement, les auteurs imposent la compatibilité entre le critère en fatigue polycyclique isotherme avec l’écriture anisotherme de la condition locale d’adaptation qui prend en compte les variations des limites d’élasticité en fonction de la température. Cette compatibilité se traduit dans la formulation des critères en fatigue polycyclique anisotherme par la dépendance à la température des caractéristiques en fatigue du matériau.

Dans le cas d’un chargement anisotherme, l’extension du critère de fatigue de Dang Van macroscopique [4], [5], prenant en compte l’écriture anisotherme de la condition d’adaptation s’écrit:

$$\min_{S^T} \left\{ \max_t \left[ \frac{\|\tau[S(t) - S^T]\|}{\beta_D(\vartheta(t))} - 1 \right] \right\} + \max_t \{ \alpha_D(\vartheta(t)) P(t) \} < 0 \tag{1}$$

Les nouvelles fonctions caractéristiques du matériau ( $\alpha_D(\vartheta(t))$ ,  $\beta_D(\vartheta(t))$ ) dépendent de la température,  $\vartheta(t)$ . La détermination de ces paramètres du matériau à partir des limites d’endurance en flexion alternée  $f_{-1}(\vartheta)$  et en torsion alternée  $t_{-1}(\vartheta)$  évaluées sur des essais effectués à différentes températures  $\vartheta$  constantes donnent :

$$\beta_D(\theta) = t_{-1}(\theta) \text{ et } \alpha_D(\theta) = \frac{t_{-1}(\theta) - \frac{f_{-1}(\theta)}{\sqrt{3}}}{t_{-1}(\theta) - \frac{f_{-1}(\theta)}{3}} \tag{2}$$

L’extension du premier critère de Papadopoulos en fonction des contraintes macroscopique proposé jusqu’ici [4], s’écrit sous la forme:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \min_{S^T} \left\{ \max_t \left[ \frac{\|\tau[S(t) - S^T]\|}{\beta_p(\theta(t))} - 1 \right] \right\} + \max_t \{\alpha_p(\theta(t))P(t)\} < 0. \quad (3)$$

$\alpha_p(\vartheta(t))$  et  $\beta_p(\vartheta(t))$  sont des fonctions caractéristiques du matériau. À partir des limites d'endurance en flexion alternée  $f_{-1}(\vartheta)$  et en torsion alternée  $\tau_{-1}(\vartheta)$  évaluées sur des essais effectués à différentes températures  $\vartheta$  constantes on a :

$$\beta_p(\theta) = \tau_{-1}(\theta) \text{ et } \alpha_p(\theta) = \frac{\tau_{-1}(\theta) - \frac{f_{-1}(\theta)}{\sqrt{3}}}{\tau_{-1}(\theta) \frac{f_{-1}(\theta)}{3}} \quad (4)$$

Nous constatons que les critères de Dang Van et Papadopoulos en fatigue polycyclique anisotherme résultant de la condition locale d'adaptation écrite dans le cas anisotherme ont permis de justifier la réécriture des critères en fatigue polycyclique anisotherme avec une dépendance à la température des constantes du matériaux. Nous proposons les modifications ci-dessus du critère de Crossland pour l'intégration du caractère anisotherme de l'histoire du chargement.

### 3 FORMULATION ANISOTHERME DU CRITÈRE DE CROSSLAND

Le critère de Crossland, en fatigue polycyclique isotherme s'exprime par

$$\sqrt{J_{2a}} + \alpha_C \sigma_{H,\max} < \beta_C; \quad (5)$$

$$\beta_C = \tau_{-1} \text{ et } \alpha_C = \frac{3}{f_{-1}} \left( \tau_{-1} - \frac{f_{-1}}{\sqrt{3}} \right). \quad (6)$$

À partir des limites d'endurance en flexion alternée à  $f_{-1}$  et en torsion alternée  $\tau_{-1}$  évaluées sur des essais effectués à la température  $\vartheta$ , constantes. L'expression équivalente du critère de Crossland peut s'obtenir sous la forme

$$\sqrt{J_{2a}} \left( 1 + \lambda \left( \frac{\sigma_{H,\max}}{\sqrt{J_{2a}}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right) + \alpha'_C \sigma_{H,\max} < \beta'_C; \quad (7)$$

$$\beta'_C = \tau_{-1} \left( 1 - \lambda \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \text{ et } \alpha'_C = 3 \left[ \left( 1 - \lambda \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \frac{\tau_{-1}}{f_{-1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right]. \quad (8)$$

Dans l'expression du critère équivalent, Eq. (6), le paramètre  $\lambda$  est une constante sans influence sur les prédictions faites avec le critère. La particularité du chargement anisotherme étant les fluctuations thermiques, les fluctuations pourraient désormais être prises en compte par une réinterprétation du paramètre  $\lambda$ .

En postulant la dépendance du paramètre  $\lambda$  à la température dans le cas de la fatigue anisotherme, la dépendance à la température des constantes du critère tel que prédit par [4], [5], s'exprime comme

$$\begin{cases} \beta'_C(\lambda) = \tau_{-1}(\theta) \left( 1 - \lambda(\theta) \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \beta'_C(\theta) \\ \alpha'_C(\lambda) = 3 \left[ \left( 1 - \lambda(\theta) \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \frac{\tau_{-1}(\theta)}{f_{-1}(\theta)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right] = \alpha'_C(\theta) \end{cases}. \quad (9)$$

L'expression (9) suggère deux possibilités d'intégration de l'information thermique dans un critère. La première modélisation se fait à partir des limites d'endurance à la température constante  $\vartheta$ , i.e.,  $\tau_{-1}$  et  $f_{-1}$ ;

$$\begin{cases} \beta_C''(\theta) = t_{-1} \left( 1 - \lambda(\theta) \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\ \alpha_C''(\theta) = 3 \left[ \left( 1 - \lambda(\theta) \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \frac{t_{-1}}{f_{-1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \end{cases} \quad (10)$$

L'expression du critère de Crossland anisotherme étant

$$\sqrt{J_{2a}} \left( 1 - \lambda(\theta) \left( \frac{\sigma_{H,\max}}{\sqrt{J_{2a}}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right) + \alpha_C''(\theta) \sigma_{H,\max} < \beta_C''(\theta). \quad (11)$$

Dans la deuxième modélisation du critère, nous intégrons dans l'expression du critère la variation continue des limites de fatigue avec la température, et le critère est formulé sous la forme:

$$\sqrt{J_{2a}} \left( 1 - \lambda(\theta) \left( \frac{\sigma_{H,\max}}{\sqrt{J_{2a}}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right) + \alpha_C'''(\theta) \sigma_{H,\max} < \beta_C'''(\theta); \quad (12)$$

$$\begin{cases} \beta_C'''(\theta) = \max(t_{-1}(\theta)) \left( 1 - \lambda \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\ \alpha_C'''(\theta) = 3 \left[ \frac{\max(t_{-1}(\theta))}{\min(f_{-1}(\theta))} \left( 1 - \lambda \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \end{cases} \quad (13)$$

#### 4 RÉSULTATS ET DISCUSSION

Les chargements réels, multiaxiaux et d'amplitude variables, sont des chargements relativement complexes. D'après [9], on peut admettre en première approximation qu'un modèle pourra décrire une situation de chargement complexe s'il peut décrire un ensemble d'essais de base.

Ainsi cette dernière section nous nous proposons de valider les différentes modifications faites sur le critère de Crossland pour son extension aux sollicitations anisothermes. Les critères isotherme et anisotherme sont appliqués aux cycles de contraintes et de température issus des calculs thermomécaniques. A notre connaissance, très peu d'études expérimentales sont consacrées au comportement cyclique des matériaux en fatigue anisotherme polycyclique.

L'étude faite par [4] porte sur le cas simple d'une éprouvette encadrée ; initialement à la température  $T_0$ , et soumise à des cycles de variations sinusoïdales de température uniforme:

$$T(t) = 140^\circ C + T_a \sin(t); \quad (14)$$

$$\begin{cases} T_{\text{moy}} = 140^\circ C \\ T_a \in [68.5^\circ C, 120^\circ C] \\ T_0 = 120^\circ C \end{cases} \quad (15)$$

Dans ce cas, l'expression proposée pour la prise en compte de température dans les modèles proposés (Eq. (11), Eq. (12)) est:

$$\lambda(\theta) = \max T(t) = T_{\text{moy}} + T_a \quad (16)$$

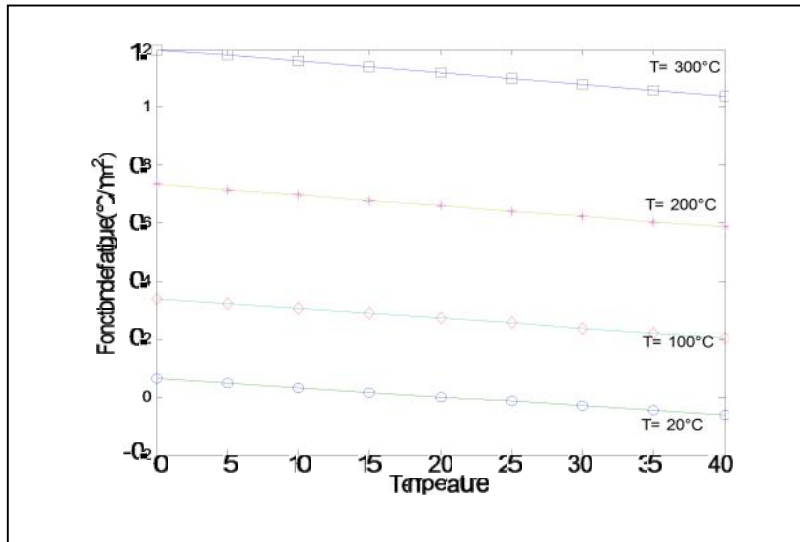


Fig. 1 : Variations de la fonction de fatigue en fonction de la température ambiante

Les limites d’endurance en flexion alternée  $f_{-1}$  et en torsion alternée  $\tau_{-1}$  à différentes températures du matériau sont donnée au Tableau 1. Les figures ci-dessous présentent l’influence de la température initiale sur le comportement en fatigue anisotherme, lorsque la température de l’éprouvette est 20 °C, 100 °C, 200 °C, et 300 °C.

Table 1 : Variation des limites d’endurance a différentes températures [4]

Temperature	$f_{-1}$ (MPa)	$t_{-1}$ (MPa)
20°C	312	200
100°C	294.3	188.5
200°C	272.2	174.2
300°C	250	160

Les deux formulations anisotherme du critère donnent une estimation de la tenue dont la sévérité est encadrée par celles des critères isothermes pris à température minimale et maximale tel que représenté à la Fig. 2 et Fig. 3. Cette simulation reproduit qualitativement les résultats attendus.

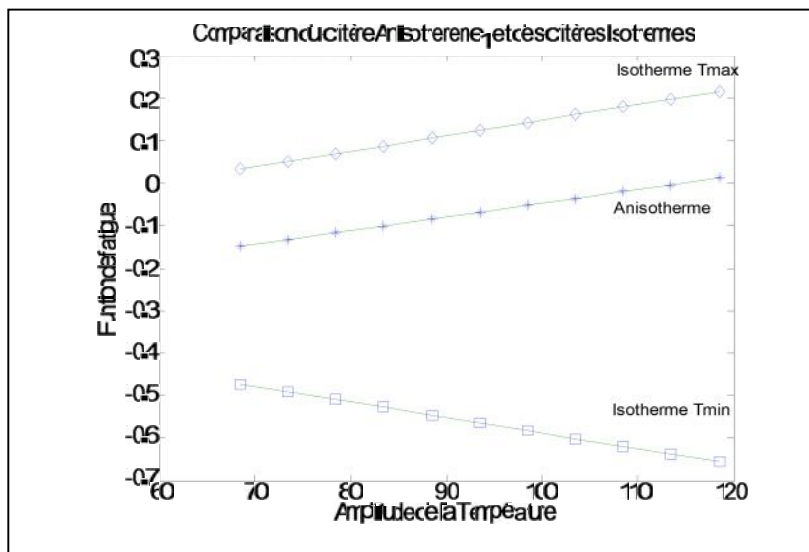


Fig. 2 : Comparaison du critère anisotherme et du critère isotherme, Eq. (11) (à  $T=T_{min}$  et  $T=T_{max}$ ).

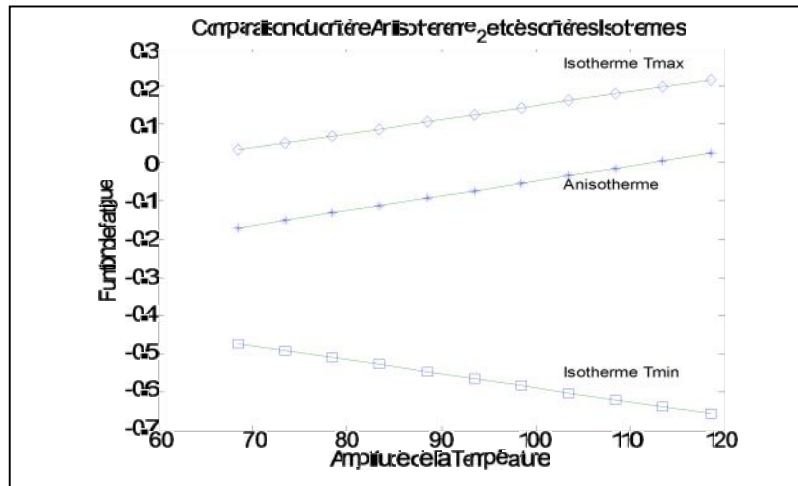


Fig. 3 : Comparaison du critère anisotherme et du critère isotherme, Eq. (12)  
(à  $T=T_{min}$  et  $T=T_{max}$ )

## 5 CONCLUSION

Le modèle équivalent du critère de Crossland a permis dans cette étude, la proposition d'une extension anisotherme du critère de Crossland, qui initialement est un critère isotherme purement mécanique. Le paramètre  $\lambda$ , représente pour nous, le paramètre d'extension du critère purement mécanique pour une prise en compte du caractère thermomécanique des sollicitations en fatigue polycyclique à grand nombre de cycles.

Les simulations obtenues reproduisent qualitativement les résultats attendus, car les deux formulations anisotherme du critère donnent une estimation de la tenue dont la sévérité est encadrée par celles des critères isothermes pris à température minimale et maximale. L'utilisation de ces deux modèles pour la prédiction de la limite d'endurance en fatigue anisotherme permettra de comparer quantitativement leur capacité de prédiction. En outre, l'intégration des incertitudes affectant le comportement en fatigue anisotherme font l'objet de travaux en cours.

## REFERENCES

- [1] A. Benoit, M.H. Maitournam, L. Remy, F. Oger, "Cyclic behaviour of structures under thermomechanical loadings: Application to exhaust manifolds," *International Journal of Fatigue*, vol. 38, pp. 65–74, 2012.
- [2] M.H. Maitournam, C. Krebs, A. Galtier, "A multiscale fatigue life model for complex cyclic multiaxial loading," *International Journal of Fatigue*, vol. 33, no. 2, pp. 232–240, 2011.
- [3] C. Bouby, "Adaptation élastoplastique de structures sous chargements variables avec règle d'écroissage cinématique non linéaire et non associée," Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2006.
- [4] M.H. Maitournam, T. M. L. Nguyen-Tajan, "Approche multi-échelle en fatigue polycyclique anisotherme," *C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb, Mécanique des solides et des structures*, pp. 373–379, 2000.
- [5] T. M. L. Nguyen-Tajan, "Modélisation thermomécanique des disques de frein par une approche eulérienne," Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, 2002.
- [6] A. Constantinescu, E. Charkaluk, G. Lederer, L. Verger, "A computational approach to thermomechanical fatigue," *International Journal of Fatigue*, vol. 26, pp. 805–818, 2004.
- [7] B. Crossland, "Effect of large hydrostatic pressure on the torsional fatigue strength of an alloy steel," *In: Proc int conf on fatigue of metals. London: Institution of Mechanical Engineers*, pp. 138–49, 1956.
- [8] J. Mandel, J. Zarka, B. Halphen, "Adaptation d'une structure élastoplastique à écroissage cinématique," *Mechanics. Research Communications*, vol. 4, pp. 309–314, 1977.
- [9] Z. Guéde, B. Sudre, M. Lemaire, "Life-time reliability based assessment of structures submitted to thermal fatigue," *International Journal of Fatigue*, vol. 29, pp. 1359–1373, 2007.