International Journal of Innovation and Scientific Research
ISSN 2351-8014 Vol. 13 No. 2 Feb. 2015, pp. 497-514
© 2015 Innovative Space of Scientific Research Journals
http://www.ijisr.issr-journals.org/

ESSAI D'ELABORATION D'UNE THEORIE EXHAUSTIVE SUR LES EQUATIONS ALGEBRIQUES

Jean KYALULA USENI Bin KIBOFO

Institut Supérieur Pédagogique (Éducation) de Bukavu, RD Congo

RESUME: Depuis toujours, les mathématiciens se sont attelés à établir des algorithmes ou formules permettant de résoudre des équations algébriques genre P(x)=0, ou P(x) est un polynôme en x de degré n à coefficient réels. Cela a pu être possible pour n≤4. Cependant, pour n≥5, le mathématicien Abel a prouvé qu'en général, on ne peut pas trouver des formules de résolution par radicaux. Ainsi, les mathématiciens n'ont plus focalisé leur attention sur la recherche de la condition de résolubilité par radicaux d'une équation algébrique de degré n≥5. La présente étude porte d'abord sur la théorie des méthodes ou des fondements de la connaissance sur les équations algébriques. Nous nous proposons ensuite d'organiser de façon raisonnée et complète la résolution des équations algébriques de degré n≤4 et de présenter les méthodes de résolution de celles de degré supérieur ou égal à 5 dans l'ensemble des nombres complexes.

MOTS-CLEFS: Algébrique, degré, équation, racine, résolution.

ABSTRACT: Mathematicians have tried to establish algorithms or formulas to solve the algebraic equations of the type of p(x) =0, where p(x) is a polynomial in x of degree n with real coefficients. That has been possible for n≤4. However, for n≥5. Abel proved that, in general, we cannot find formulas of resolution by radicals. Thus, mathematicians did not focus on the search of the resolubility condition any more by radicals of an algebraic equation of the n>5 degree. The present study discusses the theory of methods or the knowledge foundations on the algebraic equations. We also suggest the resolution of algebraic equation of n≤4 degree, and present the methods of resolution of the cells (equations) of the degree greater than or equal to 5 (n≥5) in the set of complex numbers.

KEYWORDS: Algebraic, degree, equation, root, resolution.

Section 1. UN PETIT REGARD HISTORICO-EPISTEMOLOGIQUE[1] SUR LES EQUATIONS ALGEBRIQUES

On rappelle qu'une équation algébrique de degré $n \ (n \in IN - \{0\})$, à une inconnue x, est une égalité qui, après transformations, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0 \qquad (E)$$

où $a_i \in IR, \ \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, \ \text{avec} \ \ a_n \neq 0.$

Avant d'envisager la résolution d'une telle équation sur le plan algébrique, nous nous proposons de mettre en évidence, dans cette première section, le fait que la résolution d'une telle équation dépend – à une échelle plus grande – des permutations (ou substitutions) de ses racines et du groupe qu'elles engendrent qui constitue le fondement de la théorie dite de Galois sur les équations algébriques. Signalons de prime abord que c'est aux mathématiciens Lagrange et Ruffini que nous devons les tout premiers théorèmes se rapportant aux sous-groupes du groupe des substitutions S_n, dont on sait que l'ordre est $n\,!$. Ces chercheurs sont arrivés à mettre au point ces théorèmes en examinant, au départ, des équations algébriques générales de degré n à coefficients rationnels dans lesquelles les coefficients des racines $x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n$ sont des variables indépendantes. Les méthodes de résolution qu'ils ont développées les ont parfois amenés à se servir d'équations auxiliaires, si possible de degré inférieur à n. Pour ce faire, ils ont considéré une fonction rationnelle $f\left(x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n\right)$ et se sont posé la question suivante : combien de valeurs peut prendre une telle fonction lorsqu'on permute de toutes les manières possibles les n racines $x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n$?

Si l'on désigne par $f_1, \ f_2, \ \ldots, \ f_s$ les différentes valeurs que peut prendre cette fonction, alors on conclut qu'elles sont les racines d'une équation algébrique de degré s qui peut s'écrire sous la forme : $\left(t - f_1\right)\left(t - f_2\right). \ \ldots. \ \left(t - f_s\right) = 0$. Partant du constat que la fonction $\varphi(t) = \left(t - f_1\right)\left(t - f_2\right). \ \ldots. \ \left(t - f_s\right)$ figurant dans le premier membre de l'égalité précédente a des coefficients dépendants de sommes algébriques et/ou de produits des racines considérées, certains des chercheurs arrivèrent justement à examiner ce qui va être appelé plus tard le corps de rupture des racines d'une équation algébrique et le groupe de Galois correspondant et, plus tard encore, la théorie de Galois[2] sur les équations algébriques.

Plus particulièrement, ces chercheurs établirent que si H est un sous-groupe de S_n, contenant des transformations qui laissent f invariante, alors tout élément de H transforme f en $f_1, \ f_2, \ \ldots, \ f_s$. Ainsi donc, le nombre cherché s est justement l'indice de H dans S_n.

---

[1] *L'**épistémologie** au sens strict peut apparaître soit comme le nom savant de la philosophie des sciences soit comme limitée au premier objectif, c'est-à-dire à l'étude des conditions de production des connaissances scientifiques. Il semble néanmoins que le sens du mot s'est largement étendu depuis plusieurs années. Cette évolution doit beaucoup au développement de domaines tels que l'histoire des sciences ou les sciences cognitives qui entretiennent avec l'épistémologie des rapports étroits. Ainsi le terme d'épistémologie s'est-il appliqué à de nouvelles problématiques, son sens s'est alors élargi. En particulier, il n'est pas rare aujourd'hui qu'épistémologie désigne **la théorie des méthodes ou des fondements de la connaissance**, ce qui est le sens du terme epistemology en anglais, le terme français de gnoséologie n'étant plus guère usité.*

[2] *La « **théorie de Galois** » peut être résumée par le théorème suivant qui en est le théorème fondamental : il existe une correspondance, un « dictionnaire », entre **sous-extensions** d'une extension galoisienne et **sous-groupes** de son groupe de Galois. Soit $K : F$ une extension galoisienne, soit $G = Gal(K : F)$ son groupe de Galois. À tout sous-groupe H de G, on associe le corps F^H formé des éléments de K fixés par tout élément de H; il contient F (puisque les éléments de G sont tous des F -morphismes de corps, laissant par définition invariants les éléments de F. À tout sous-corps E de K contenant F, on associe le sous-groupe $H = Gal(K : E)$ de G. Ces opérations $\varphi : H \mapsto F^H$ et $\psi : E \mapsto Gal(K : E)$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre. De plus, l'extension $E : F$ est galoisienne si, et seulement si, le sous-groupe $H = Gal(K : E)$ est distingué dans G.*

Ruffini prouva, en particulier, que ce nombre est au moins égal à 2 et ne peut être plus grand que 5 pour des fonctions rationnelles non symétriques. Ce résultat a été généralisé aux fonctions de n variables par Cauchy dans un Mémoire intitulé « *Sur le nombre de valeurs qu'une fonction peut acquérir lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme* ». Dans ce Mémoire, Cauchy prouva que si n est le nombre de variables indépendantes de f et si p est le plus grand nombre premier contenu dans l'écriture primaire de n, alors le nombre de valeurs possibles que peut prendre une fonction rationnelle non symétrique de n variables f ne peut être inférieur à p et qu'il vaut, au minimum, 2.

Dans ce Mémoire, Cauchy distingue les permutations et les substitutions. Il précise que, lorsqu'on écrit les n variables que renferme la fonction dans un ordre quelconque, il s'agit d'une permutation. Il appelle « permutation » le passage d'une permutation à une autre. Ainsi par exemple (pour une fonction contenant 4 variables réelles), le passage de la permutation notée $1.2.4.3$ à la permutation notée $2.4.3.1$ donne la « substitution » notée $\begin{pmatrix} 1.2.4.3 \\ 2.4.3.1 \end{pmatrix}$.

Galois a utilisé quelques années plus tard cette même terminologie. Il définit, par exemple la notion de « groupe de substitutions ». Quelques décennies plus tard, les « substitutions » définies par Cauchy et Galois furent simplement nommées des « permutations », en accord avec le sens original et étymologique du verbe latin « *permutare* ».

La théorie des équations de Galois est fondée sur celle des équations algébriques (spécifiquement l'analyse des équations polynomiales à coefficients rationnels). Elle prend explicitement pour thème la symétrie et la dissymétrie de l'ensemble des racines d'une équation irréductible à coefficients rationnels,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (E)$$

Rappelons que les travaux de Cauchy avaient déjà montré l'existence d'un domaine $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ étendant les rationnels et sur lequel (E) se décompose sous la forme $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n) = 0$, (auquel cas on dit que (E) est « scindée ») où les α_k $(1 \le k \le n)$ sont les racines de l'équation (E) dans une « clôture algébrique » du *surcorps* (ou *extension*) de corps des rationnels engendré par les coefficients de (E), en supposant que le polynôme figurant dans le premier membre de (E) est *irréductible* sur le champ des rationnels. L'indexation des racines sous la forme α_k $(1 \le k \le n)$ est tout à fait arbitraire. Pour l'algébriste qui calcule sur les rationnels, ces racines n'existent pas. Ce qui existe c'est le domaine $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et la manière dont il s'obtient à partir de (E). Cette factorisation « plausible » de (E) implique qu'il existe – par identification – des relations entre les coefficients de (E) et ses racines éventuelles. Si l'on développe le premier membre de l'égalité $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n) = 0$, de manière à pouvoir procéder à une identification avec celui de (E), on constate que les coefficients du développement ainsi obtenu seront fonction de sommes et/ou de produits des α_k $(1 \le k \le n)$, pris dans un certain ordre (ou dans un ordre différent). Le nombre d'équations obtenues après identification dépendra donc, entre autres facteurs, de la permutabilité de ces racines et de la possibilité qu'on a d'opérer sur elles (somme, produit, quotient, etc., ce qui induit une *structuration*[3] du domaine

[3] *Signalons, à ce propos, que cette approche a conduit Galois à mettre en évidence, pour la première fois dans l'histoire des mathématiques, une structure abstraite qu'il appelle* ***groupe****. À la différence de ses prédécesseurs, il n'étudie pas une incarnation particulière comme les permutations de Lagrange ou les groupes cycliques de Gauss, mais une structure générale définie par un ensemble et une loi. Ses travaux seront plus tard orientés vers l'étude et la recherche du plus petit ensemble de nombres, stable pour les quatre opérations et qui contienne à la fois coefficients et racines d'une équation donnée. Cette approche entre dans la théorie dite de Galois. Elle offre une condition nécessaire et suffisante pour savoir si une équation polynomiale se résout par les techniques décrites par la première approche, dans le cas contraire l'on doit se limiter à des approximations issues de l'analyse.*

$D(\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n)$ les contenant). Si ces dernières peuvent être exprimées à l'aide de formules prenant en compte uniquement les coefficients rationnels de (E) et, éventuellement la fonction « racine d'indice n », alors on dit que (E) est résoluble par radicaux. C'est dans ce contexte que les mathématiciens de l'époque, tels que Ruffini et Cauchy, et plus tard Lagrange, Abel et Galois, se sont intéressés au nombre de valeurs que peut prendre une fonction rationnelle lorsqu'on permute de toutes les manières possibles les variables ou quantités qu'elles renferment …

À proprement parler, les racines de (E) ne sont pas toujours « envisageables » du point de vue de leur existence « réelle ». (Nous signalons, en passant, que c'est sans doute cette approche qui a conduit des mathématiciens comme Bombelli et Cardan à manipuler, avec audace, des symboles[4] n'ayant pas de sens (à leur époque) et des nombres « imaginaires », seulement acceptés comme intermédiaires de calcul.). Elles ne le sont que dans le sens où le domaine $D(\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n)$ est d'autant plus vaste que les substitutions que peut effectuer un algébriste ne connaissant que les rationnels sont plus nombreuses. Ces substitutions peuvent être toutes les permutations qui échangent les racines. Il peut exister aussi des relations rationnelles « particulières » entre elles (équations « bicarrées », équations « réciproques »).

Le groupe de symétrie de l'équation (groupe de Galois) est alors le plus grand groupe de substitutions qui respecte les relations entre les racines. Il traduit notre manque de discernement entre les α_k $(1 \leq k \leq n)$ mais apprécie également la dimension du nouveau domaine de rationalité $D(\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n)$ qu'il constitue. Il mesure bien l'espace de liberté engendré par le problème. Ces racines n'existent que virtuellement. Elles n'agissent pas comme individus mais par la potentialité de leurs échanges. Galois eut l'intuition d'étudier les solutions possibles (ou racines) d'une équation polynômiale à coefficients rationnels en fonction des permutations capables de « supporter ces racines », une intuition qui fut développée par la suite dans tout son potentiel et toutes ses dimensions d'abord par Augustin Louis Cauchy et Arthur Cayley, ensuite par un grand nombre d'autres mathématiciens qui s'intéresseront à ce domaine fécond (parmi lesquels nous citerons Andrew Wiles dont on affirme qu'il trouva dans la théorie de Galois une partie de l'inspiration qui lui a permis, il y a quelques années, de démontrer le dernier et grand théorème de Fermat).

Pour illustrer le rapport existant entre les permutations des racines et la résolution des équations algébriques, prenons un exemple concret et assez élémentaire. Considérons l'équation algébrique à coefficients rationnels suivante : $x^2 - 4x + 1 = 0$. Elle admet comme racines les deux irrationnels $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 - \sqrt{3}$. Ces deux racines vérifient les deux équations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 \,.\, x_2 &= 1 \end{aligned}$$

(obtenues par identification des deux équations $x^2 - 4x + 1 = 0$ et $(x - x_1)(x - x_2) = 0$). Ces deux équations sont toujours vraies (et invariables) si nous permutons les racines x_1 et x_2 puisque, dans ce cas, on obtient :

$$\begin{aligned} x_2 + x_1 &= 4 \\ x_2 \,.\, x_1 &= 1 \end{aligned}$$

Ruffini *(1765-1822) est le premier à prévoir l'impossibilité de la solution générale et que la compréhension du phénomène réside dans l'étude des permutations des racines. Sa démonstration reste néanmoins peu rigoureuse et partielle. Le mathématicien norvégien Abel (1802 - 1829) publie une démonstration en 1824 qui finit par convaincre la communauté scientifique. Elle ne propose pas à l'époque de condition nécessaire et suffisante de résolubilité.* ***Abel établit enfin que, pour*** $n \geq 5$, ***il est impossible de résoudre l'équation algébrique*** (E) ***par radicaux.***

[4]*On se rappellera la fameuse notation* $\sqrt{-1}$ *utilisée par Bombelli …*

Galois étudia en profondeur les permutations des racines qui laissent les fonctions invariables. A partir de là, il définit ce qui fut appelé le groupe de Galois d'une équation. Ainsi, par exemple, le groupe de Galois du polynôme $P(x) = x^2 - 4x + 1$ contient la permutation identique et la transposition illustrée dans l'exemple précédent.

Pour appuyer ce premier exemple (assez élémentaire), considérons un second exemple illustratif portant sur l'équation algébrique à coefficients rationnels suivante (dont le choix de la forme « bicarrée » est dicté par le souci de facilitation de sa résolution algébrique) : $x^4 - 46x^2 + 289 = 0.$

Il s'agit d'une équation (biquadratique) du quatrième degré, comportant les 4 solutions calculables par radicaux (à l'aide de la substitution $x^2 = z$, des formules classiques donnant les racines d'une équation algébrique de la forme $az^2 + bz + c = 0$ et en tenant compte du fait que $23 \pm 4\sqrt{15} = \left(\sqrt{3} \pm 2\sqrt{5}\right)^2 = \left(-\sqrt{3} \mp 2\sqrt{5}\right)^2$) suivantes : $\alpha = -\sqrt{3} + 2\sqrt{5},\ \beta = -\sqrt{3} - 2\sqrt{5},\ \gamma = \sqrt{3} + 2\sqrt{5}$ et $\delta = -\sqrt{3} - 2\sqrt{5}.$

Si nous prenons en compte les permutations possibles entre ces quatre solutions, nous trouvons 24 possibilités. Aujourd'hui, nous savons qu'elles forment un groupe noté $S_4,$ et appelé groupe symétrique d'ordre 24, mais il est à noter que ce concept était encore inconnu à l'époque des chercheurs comme Cauchy et Galois, lorsque ces derniers ont évoqué la notion de « symétrie » ou de « permutations » des solutions d'une équation algébrique à coefficients rationnels.

Les quatre solutions déterminées précédemment sont toutes des racines du polynôme $P(x) = x^4 - 46x^2 + 289,$ mais quand nous considérons leurs permutations respectives, nous constatons qu'il existe des différences remarquables dans leur « symétrie ». Certaines de ces permutations « agissent », en effet, différemment sur les coefficients de $P(x)$ que d'autres qui ont plutôt tendance à les laisser invariants.

En guise d'illustration, considérons les expressions à coefficients rationnels suivantes : $\alpha + \delta = 0$ et $\beta + \gamma = 0,$ vérifiées par les quatre racines précédemment calculées. Il est à noter que, du point de vue de $P(x)$, rien ne change si l'on procède à la permutation de S_4 suivante : $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}$, puisque nous obtenons les égalités $\delta + \alpha = 0$ et $\gamma + \beta = 0,$ qui sont les mêmes que les précédentes. Autrement dit, si les racines sont échangées, les expressions algébriques considérées, à coefficients rationnels, qu'elles vérifient restent valables. Ainsi donc, toute équation algébrique à coefficients rationnels qui est satisfaite par les solutions considérées demeure également inchangée à l'issue d'une telle permutation de ces solutions, ce qui les rend interchangeables et « indiscernables » en tant qu'entités.

Il existe pourtant d'autres expressions algébriques qui sont modifiées si l'on prend en compte la permutation susmentionnée, qui « remplace » α par δ et β par $\gamma.$ Ainsi, par exemple, pour une équation algébrique qui impliquerait ces relations, on a $\alpha - \delta = -2\sqrt{3} + 4\sqrt{5},$ mais $\delta - \alpha = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{5}$; $\beta - \gamma = -2\sqrt{3} - 4\sqrt{5}$ mais $\gamma - \beta = -2\sqrt{3} + 4\sqrt{5}.$

En considérant que les permutations qui laissent invariantes les expressions à coefficients rationnels vérifiées par les racines d'une équation algébrique donnée sont les « bonnes » permutations, on peut donc affirmer qu'il y a, dans $S_4,$ de « bonnes » et de « mauvaises » permutations. (Nous savons actuellement que les « bonnes » permutations forment ce qu'on appelle le « groupe de Galois » de $P(x)$.)

En outre, la permutation $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \gamma & \beta & \alpha & \delta \end{pmatrix}$, échangeant les racines α et γ, ne vérifie plus les expressions $\alpha + \delta = 0$ et $\beta + \gamma = 0,$ considérées précédemment, puisqu'à l'issue de cette permutation, on a, par exemple : $\gamma + \delta = 2\sqrt{3} \neq 0.$ Cette permutation ne figure donc pas parmi les « bonnes ». Une recherche laborieuse (avec les « arguments » de l'époque de

Cauchy, mais largement facilitée par les « outils » de l'actuelle « théorie de Galois ») de toutes les « bonnes » permutations des racines de $P(x)$ nous conduit à en identifier seulement 4 parmi les 24 éléments possibles de S_4.

Il est évident que, d'une manière générale, si la fonction développée dans le premier membre de l'égalité $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_n) = 0$ est quelconque, le nombre de valeurs qu'elle peut prendre à l'issue d'une permutation des racines α_k $(1 \leq k \leq n)$ ne peut être fixé dès le départ (Cauchy montre, dans son premier *Mémoire* susmentionné et portant sur cette question, que ce nombre vaut au plus $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$).

De ce qui précède, il ressort clairement qu'une équation algébrique de degré n $(n \in IN - \{0\})$, notée :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0 \qquad (E)$$

avec $a_i \in IR, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, \; a_n \neq 0,$ n'est résoluble par radicaux (c'est-à-dire à l'aide de formules faisant intervenir ses coefficients et dépendant éventuellement de la fonction « racine $n^{\text{ème}}$ ») que pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Pour $n \geq 5,$ une telle résolution est impossible en vertu des travaux d'Abel et de Galois.

Des formules de résolution de l'équation susmentionnée (E) existent donc pour $1 \leq n \leq 4$. S'il faut avouer que la résolution de l'équation (E) ne pose aucun problème pour $1 \leq n \leq 2$, il faut toutefois reconnaître que pour $2 \leq n \leq 4,$ les formules sont généralement méconnues du grand public et même, parfois, de certains mathématiciens professionnels ou enseignants des mathématiques. En effet, nos nombreuses années d'expérience en tant qu'enseignant d'algèbre à l'Institut Supérieur Pédagogique de Bukavu nous ont, hélas !, permis de constater que beaucoup de nos finalistes du graduat en mathématique-physique (et même ceux de licence) ne connaissent que des artifices de calcul pour résoudre les équations algébriques du troisième et du quatrième degrés, artifices limités aux équations réductibles au second degré (équations dites symétriques ou réciproques, équations bicarrées ou factorisables par la méthode de Hörner). Quand aucune de ces méthodes algorithmiques basées sur des artifices de calcul ne « marche », l'équation algébrique (du 3$^{\text{ème}}$ ou du 4$^{\text{ème}}$ degrés) à résoudre est considérée comme « difficile » (certains poussent la naïveté et l'ignorance jusqu'à la considérer comme « impossible ») et piteusement abandonnée sans autre forme de procès … Par ailleurs, il est important de signaler qu'une résolution particulière, fondée sur la méthode de factorisation de HÖRNER est réductrice en ce sens qu'elle est fondée sur le postulat ou le présupposé qu'une au moins des solutions de l'équation algébrique à résoudre est un nombre entier[5]. Ce qui est faux dans le cas général.

C'est essentiellement pour suppléer à cette grave lacune que nous proposons dans les lignes qui suivent les formules de résolution (par radicaux) de l'équation algébrique (E) pour $1 \leq n \leq 4$. Nous n'allons pas prétendre réinventer la roue en nous attribuant, à tort et malhonnêtement, la paternité de ces formules de résolution (dont les auteurs sont bien connus et) qui existent depuis des décennies. Nous signalons toutefois que notre originalité consiste en une organisation raisonnée et complète sur les équations algébriques qui fait de cette notion *paramathématique* (car non définie au sens mathématique du terme) d'équation un « *objet du savoir mathématique* » dont l'étude peut désormais être considérée comme complète et exhaustive sur le plan didactique. A notre connaissance, aucun autre travail n'a été localement orienté dans cette voie … ce qui légitime notre étude. Nous choisissons l'ensemble C des nombres complexes comme champ de résolution. Etant

[5]*Cette méthode part, en effet, de la propriété selon laquelle, pour une équation algébrique scindée* $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) = 0,$ *le terme indépendant obtenu après développement du premier membre est le produit des racines de cette équation. Donc, en supposant que l'une de ces racines est entière, on conclut qu'elle divise nécessairement le terme indépendant. La méthode de résolution consiste alors à déterminer, parmi les diviseurs du terme indépendant, un entier* α *qui annule l'équation et, ensuite, à factoriser le polynôme figurant dans le premier membre de l'équation à l'issue d'une division de ce polynôme par* $x-\alpha$.

algébriquement clos, toute équation algébrique (E) de degré $n\ (n \in IN - \{0\})$ admet exactement n racines dans C, comptées avec leur multiplicité.

Le *théorème d'Abel* et le théorème de d'Alembert-Gauss sont les deux théorèmes fondamentaux de la théorie des équations, c'est-à-dire la théorie qui traite des équations polynomiales ou équivalentes. Une équation est dite polynomiale si elle est de la forme $P(X) = 0$, où P désigne un polynôme. Le théorème de d'Alembert-Gauss indique qu'une équation polynomiale à coefficients complexes admet au moins une racine complexe.

Des méthodes numériques comme la méthode de Newton ou celle de Laguerre s'appliquent indépendamment du degré de l'équation. Si n, le degré du polynôme, est petit, il existe aussi des méthodes dites *algébriques* pour résoudre l'équation. Ainsi, si n est égal à 2, et si P s'écrit ax^2+bx+c, les racines sont données par la formule classique $(-b\pm \sqrt{b^2-4ac})/2a$, où b^2-4ac est le discriminant du polynôme ; on dit que $\sqrt{b^2-4ac}$ est un *radical*. Des formules analogues (mais plus compliquées) existent pour les polynômes de degré 3 ou 4, comme le montrent les méthodes de Cardan et de Ferrari que nous exposerons en détails dans les sections suivantes de notre texte..

Mais pour les degrés strictement supérieurs à 4, et en dépit de plusieurs siècles d'efforts, aucune formule générale analogue à celles des degrés 2, 3 et 4 n'avait pu être trouvée. Le théorème d'Abel exprime le fait qu'aucune formule de cette nature n'existe. Une méthode pour exprimer néanmoins les racines consiste à faire usage d'une famille de fonctions plus vaste que celle des racines $n^{\text{ièmes}}$, telle que celle des fonctions elliptiques ; mais les formules ainsi obtenues n'ont qu'un intérêt théorique ; en pratique, il est bien plus intéressant d'obtenir des valeurs approchées à l'aide, par exemple, de la méthode de Newton.

L'expression la plus proche de celle d'Abel est la suivante :

Il n'existe pas de formule générale exprimant les solutions de l'équation du cinquième degré sous forme de radicaux.

Évariste Galois est l'auteur d'une forme plus aboutie du théorème. Sa méthode est celle généralement utilisée pour démontrer le théorème. Cette formulation prend parfois le nom de *Théorème d'Abel*, souvent aucun nom n'est indiqué et plus rarement le nom de *théorème d'Abel-Galois*. Sa formulation est plus générale car elle s'applique à tout corps K contenant les rationnels et non plus uniquement au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Elle indique aussi si une équation algébrique est résoluble par radicaux ou non.

Soit P un polynôme à coefficients dans un corps (commutatif et de caractéristique nulle, comme annoncé dans l'introduction). Alors :

Le polynôme P est résoluble par radicaux si et seulement si son groupe de Galois est résoluble.

Le polynôme $X^5 - 3X - 1$ n'est pas résoluble par radicaux, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible d'exprimer les racines de ce polynôme à partir de nombres entiers à l'aide des quatre opérations usuelles et de radicaux. Le groupe de Galois de ce polynôme est le groupe symétrique S_5, qui n'est pas résoluble Si le groupe de Galois d'un polynôme irréductible sur un corps parfait comme $\mathbb{Q}$, celui des nombres rationnels, n'est pas résoluble, alors les racines du polynômes ne s'expriment pas à l'aide de radicaux. Tel est le contenu de la version formulée par Évariste Galois et en langage moderne, du théorème d'Abel. Les exemples les plus simples s'obtiennent à l'aide d'équation du cinquième degré dont le groupe de Galois est le groupe symétrique S_5, qui n'est pas résoluble d'après les résultats précédents. Le théorème d'Abel montre que l'équation $P(X) = 0$ n'est alors pas résoluble par radicaux dans $\mathbb{Q}$.

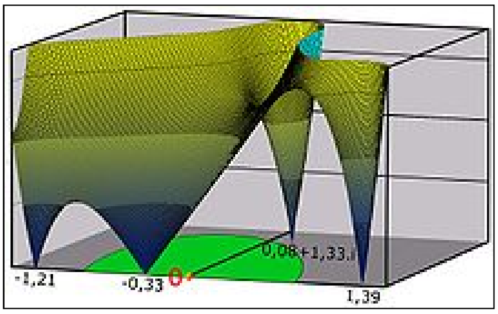


Fig. 1. Nappe qui à z, associe le module de P(z)

Le polynôme à coefficients dans le corps Q des nombres rationnels : $P(X) = X^5 - 3X - 1$ est un exemple de polynôme de cette naturel, ce qui se démontre relativement simplement. Ce polynôme est illustré sur la figure ci-dessus, plus précisément cette figure illustre la nappe qui à un nombre complexe *z* associe le module de *P*(*z*) pour les points de coordonnée imaginaire positive. On remarque que l'équation associée possède 5 racines dont trois réelles, de valeurs approximatives -1,21 -0,33 et 1,39 et deux imaginaires 0,08 + 1,33.*i* et son conjugué 0,08 - 1,33.*i*. L'existence d'un unique couple de racines imaginaires conjuguées montre l'existence d'une transposition dans le groupe. Le fait qu'il n'existe qu'une unique racine dans le disque unité, illustré en vert sur la figure, est l'un des arguments possibles pour montrer que le polynôme est irréductible dans Q.

En effet, s'il ne l'était pas, par factorialité de Z [*X*], il serait le produit de deux polynômes unitaires à coefficients dans Z, de degrés respectifs 1 et 4 ou 2 et 3. Les termes constants de ces deux polynômes auraient pour produit -1 donc seraient égaux à 1 ou -1 et opposés l'un de l'autre. Les deux méthodes ci-dessous montrent qu'une telle factorisation est impossible. Preuve : - Premier cas : l'un des facteurs est de degré 1, donc égal à $X - 1$ ou $X + 1$ est exclu d'emblée, car 1 et -1 ne sont pas racines de *P*(*X*).

- Dans l'autre cas (degrés 2 et 3), il existerait deux entiers a et b, avec b égal à 1 ou -1, tels que $X^5 - 3X - 1 = (X^3 + aX^2 + (a^2 + b)X + b)\,(X^2 - aX - b)$. Le calcul du terme d'ordre 1 montre que $a(a+1) = 2b$ c'est-à-dire $b = 1$ et $a = 1$ ou $a = -2$, ce qui est incompatible avec le calcul du terme d'ordre 2, qui fournit $a^3 + 2ab - b = 0$. On en déduit que le groupe contient un élément d'ordre 5.

Montrons que *G* contient un élément d'ordre 5. Soit α une racine de *P*, le cardinal de l'orbite de α est un diviseur de l'ordre du groupe. Comme le polynôme *P* est irréductible, l'orbite de α est l'ensemble des 5 racines. Ceci montre que l'ordre de *G* est un multiple de 5. Un théorème de Cauchy montre alors que *G* contient un élément d'ordre 5. Les seuls éléments d'ordre 5 de S_5 étant des cycles d'ordre 5, *G* en contient un. Or le groupe symétrique d'ordre 5 est engendré par tout couple composé d'une transposition et d'un élément d'ordre 5. Le groupe de Galois est en conséquence isomorphe à S_5. L'existence de ces deux éléments (transposition et élément d'ordre 5) établit que le groupe de Galois est isomorphe à S_5.

Remarque 1. Il est impropre de dire que l'équation *P*(*z*) = 0 n'est pas résoluble. Cette équation possède 5 racines qui s'approximent aussi précisément qu'on le souhaite et qui s'expriment exactement à l'aide d'intégrales elliptiques. En revanche, ces racines ne peuvent s'exprimer à l'aide des quatre opérations et de radicaux, ce qui démontre qu'il n'est pas possible de trouver une expression des racines dans le cas général d'une équation du cinquième degré, comme on peut le faire pour les équations de degré 1, 2, 3 ou 4.

Voici à présent les résolutions par radicaux des équations algébriques de degrés inférieurs ou égaux à 4 dont la connaissance est, pour nous, absolument indispensable aussi bien pour tous les adeptes des mathématiques élémentaires ou appliquées que pour les apprenants des mathématiques :

Section 2 : EQUATIONS ALGEBRIQUES DU PREMIER DEGRE ET DU SECOND DEGRE A UNE INCONNUE DANS C

I. EQUATIONS ALGEBRIQUES DU PREMIER DEGRE DANS R (OU DANS C)

[Source : Lorent. S et Lorent R, *Algèbre 2A,* Editions A De BOECK, Bruxelles 1968.].

I.1. Définition : une équation algébrique du premier degré (à une inconnue x) dans le champ IR des réels est une égalité qui, après transformations, peut s'écrire sous la forme $ax + b = 0$, avec $a, b \in IR$. Résoudre une telle équation équivaut à déterminer, si possible, les valeurs de x vérifiant cette égalité.

I.2. Résolution et discussion

- Si $a \neq 0$, alors on a $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$, l'équation admet une solution réelle unique $x = \frac{-b}{a}$.
- Si a=0 et si $b \neq 0$, alors l'équation $ax + b = 0$ s'écrit 0x+b=0 $\Leftrightarrow 0x = -b \neq 0$. Ce qui est absurde. On dit alors que l'équation est impossible et elle n'admet pas de solution.
- Si a=0 et b=0, alors on a : 0x+0=0, l'équation est dite indéterminée c'est-à-dire tout réel est solution de l'équation donnée.

II. EQUATIONS ALGEBRIQUES DU SECOND DEGRE DANS C

[Lorent. S et Lorent R, *Algèbre 2A,* Editions A De BOECK, Bruxelles 1968.].

II.1. Définition :

Une équation algébrique du second degré (à une inconnue x) dans le champ C des nombres complexes est une équation qui, après transformations, peut s'écrire sous la forme $\mathrm{a}x^2 + bx + c = 0$ où a,b,c $\in \mathbb{R}$ $(\mathrm{a} \neq 0)$.

II.2. Résolution et Discussion

L'équation $ax^2 + b + c = 0$ peut être transformée comme suit :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = 0$$

En considérant que les termes x^2 et $\frac{bx}{a}$ sont les deux premiers termes du développement suivant $(\mathrm{x} + \frac{b}{2\mathrm{a}})^2$ = $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$, nous pouvons écrire :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$= \mathrm{a}\,(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) = 0$$

$$= \mathrm{a}\,[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}] = 0$$

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$ l'équation s'écrit :

$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0.$ Δ est appelé le discriminant ou le réalisant de l'équation du second degré.

Trois cas sont possibles :

1er cas : Si $\Delta>0,$ l'équation s'écrit :

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0\ \ ou\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0\ \ ou\, x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\ \ ou\, x=\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

L'équation admet deux solutions réelles $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ et\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

2ème cas : Si $\Delta<0,$ l'équation s'écrit $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0$

L'expression $-\frac{\Delta}{4a^2}$ est positive et $\sqrt{\Delta}\in C.$ L'équation du second degré admet deux racines complexes conjuguées.

En effet, $\Delta=b^2-4ac=i^2(4ac-b^2)$ les solutions existent puisque $4ac-b^2>0,$ par suite :

$$x_1=\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a},\ et\ x_2=\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

3ème cas : Si $\Delta=0,$ l'équation devient

$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right]=0\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=0\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}.$ L'équation admet deux solutions réelles et confondues $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

Donc une équation algébrique $ax^2+b+c=0$ d'inconnue x et définie dans C possède toujours deux solutions : ces solutions sont distinctes pour $\Delta=b^2-4ac\neq0$ et elles sont confondues pour $\Delta=b^2-4ac=0.$

Section 3 : EQUATIONS ALGEBRIQUES DU TROISIEME DEGRE ET DU QUATRIEME DEGRE A UNE INCONNUE DANS C

I. EQUATIONS ALGEBRIQUES DU TROISIEME DEGRE

Depuis toujours, les mathématiciens se sont attelés à établir des algorithmes ou formules permettant de résoudre des équations algébriques du genre $P(x) = 0,$ où $P(x)$ est un polynôme en x de degré n à coefficients réels. Cela a pu être possible pour $n \leq 4.$

Cependant, pour $n \geq 5,$ le mathématicien Abel a prouvé qu'en général, on ne peut pas donner des formules de résolution par radicaux. Ce constat permit aux mathématiciens de ne plus focaliser leur attention sur la recherche de la condition de résolubilité par radicaux d'une équation algébrique donnée dont le degré est supérieur à 4.

I.1. Définition : Une équation algébrique du troisième degré est une équation de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (*),$ avec $a, b, c, d \in IR \ (a \neq 0).$

I.2. Résolubilité par radicaux d'une équation algébrique du troisième degré

Proposition 1 : Toute équation algébrique de degré impair n admet au moins une racine dans $IR.$

Preuve : Soit $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0,$ où $a_i \in IR, \ \forall i \in [0, n] \cap IN,$ une équation algébrique. Le corps C des complexes étant algébriquement clos, cette équation admet exactement n racines dans C, comptées avec leur multiplicité. Soit k l'une de ces racines. On a donc $P(k) = \sum_{i=0}^{n} a_i k^i = 0.$ Soit alors $\overline{k}$ le conjugué de k dans $C.$ (On rappelle que si $k = a + bi,$ alors $\overline{k} = a - bi$) On a donc :

$$
\begin{aligned}
P(\overline{k}) &= \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{k}^i = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i}\, \overline{k^i} \quad (\text{car } a_i \in IR \Rightarrow a_i = \overline{a_i}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i k^i} \quad (\text{car } \overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}) \\
&= \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i k^i} \quad (\text{car } \overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}) \\
&= \overline{0} \quad (\text{car } \sum_{i=0}^{n} a_i k^i = 0) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Il en résulte que si k est une racine de $P(x)$, alors son conjugué l'est aussi. Par conséquent, les racines complexes de $P(x)$ sont appariées, chacune d'elles avec son conjugué. On en déduit que, si le degré n de $P(x)$ est impair, alors l'une de ses racines au moins est réelle car, si non, la racine « célibataire » n'aurait pas son conjugué dans l'ensemble des racines de $P(x)$, ce qui serait contradictoire. CQFD.

Corollaire 1 : Toute équation algébrique de degré 3 admet au moins une racine réelle.

Preuve : conséquence immédiate de la proposition précédente, du fait que le degré 3 de $P(x)$ est un entier impair.

Corollaire 2 : Toute équation algébrique du troisième degré est réductible sur le corps des réels.

Preuve : En effet, d'après le corollaire 1, toute équation algébrique $P(x) = 0$ de degré 3 admet une solution réelle α. On en déduit que $P(x)$ est divisible par $x - \alpha$. Par conséquent, il existe un polynôme $Q(x)$ à coefficients réels tel que $P(x) = (x - \alpha)\, Q(x)$. Ce qui prouve que $P(x)$ est bien réductible sur IR. CQFD.

I.3. Résolution générale de l'équation algébrique : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (a \neq 0) \qquad (1)$

Soit à résoudre l'équation du troisième degré $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, avec $a, b, c, d \in IR \ (a \neq 0)$.

Première étape : Transformation de l'équation (1)

Proposition 2 : Par une « translation » adéquate, on peut annuler le coefficient suivant le terme dominant (i.e. faire disparaître le terme en x^2).

Preuve : Effectuons une « translation », en remplaçant dans (1) x par $y - \dfrac{b}{3a}$. Nous obtenons :

$$a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad ay^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a}\right)y + \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)y + \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2} = 0 \quad (car \ \ a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad y^3 + py + q = 0 \qquad \left(en \ \ posant \ \ p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \ \ et \ \ q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2}\right)$$

Deuxième étape : Résolvons alors l'équation $y^3 + py + q = 0$ (2)

Posons $y = u + v$. L'équation (2) devient : $(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q = 0 \Rightarrow u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0$$
$$\Rightarrow u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0$$

Cette égalité est vérifiée si l'on pose $u^3 + v^3 + q = 0$ et donc $3uv + p = 0$. C'est-à-dire

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

On en déduit que u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation du second degré suivante : $T^2 + qT - \dfrac{p^3}{27} = 0$, dite « la résolvante » de l'équation (2).

Troisième étape : Résolution de l'équation $T^2 + qT - \frac{p^3}{27} = 0$

Son discriminant est, par définition, celui de (2) et il vaut : $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} = \frac{4p^3 + 27q^2}{27}$. Son signe ne dépend que de celui de $4p^3 + 27q^2$.

- Si $\Delta = \frac{4p^3 + 27q^2}{27} > 0,$ alors la résolvante admet deux racines réelles distinctes :

$T_1 = \frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}$ et $T_2 = \frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}$ i.e. $u^3 = \frac{-q + \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}}{2}$ et $v^3 = \frac{-q + \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}}{2}$.

On extrait alors les 3 racines complexes $u_1,\ u_2 = u_1 j$ et $u_3 = u_1 j^2$ de u^3 (dont u_1 est réelle, avec $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ *et* $j^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$) ainsi que celles $v_1,\ v_2 = v_1 j$ et $v_3 = v_1 j^2$ de v^3 (dont v_1 est réelle). En les couplant convenablement de manière à réaliser les conditions $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$, on obtient alors les trois solutions de l'équation (2), parmi lesquelles la racine réelle est : $y_1 = u_1 + v_1 = \frac{-q + \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}}{2} + \frac{-q - \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}}{2}$

(**Formule de Cardan**). Il ne reste plus qu'à appliquer la translation inverse, par la formule $x = y - \frac{b}{3a}$, pour obtenir les trois solutions x_1, x_2 et x_3 de l'équation (1).

- Si $\Delta = \frac{4p^3 + 27q^2}{27} = 0,$ la résolvante admet une racine réelle double

$T_1 = T_2 = \frac{-q}{2}$ i.e. $u^3 = v^3 = \frac{-q}{2}$. En tirant leurs racines cubiques respectives et en tenant compte des conditions susmentionnées, on obtient les racines y_1, y_2 et y_3 de l'équation (2), puis celles x_1, x_2 et x_3 de l'équation (1).

- Si, enfin, $\Delta = \frac{4p^3 + 27q^2}{27} < 0,$ alors la résolvante admet deux racines complexes conjuguées

$T_1 = \frac{-q + i\sqrt{-\Delta}}{2}$ et $T_2 = \frac{-q - i\sqrt{-\Delta}}{2}$ dont on calcule les trois racines cubiques complexes respectives pour trouver les trois valeurs de u et celles de v. En les couplant convenablement en fonction des conditions $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$, on obtient alors les racines y_1, y_2 et y_3 de l'équation (2), puis celles x_1, x_2 et x_3 de l'équation (1).

II. EQUATIONS ALGEBRIQUES DU QUATRIEME DEGRE

II.1. Définition : Une équation algébrique du troisième degré est une équation de la forme $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (**), avec $a, b, c, d, e \in IR$ $(a \neq 0)$.

II.2. Résolubilité par radicaux d'une équation algébrique du quatrième degré

Soit à résoudre l'équation algébrique $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (2.1). On procède selon un schéma analogue à celui de la résolution précédente :

Première étape : On élimine tout d'abord le coefficient du terme en x^3, en posant $x = y - \dfrac{b}{4a}$. Il vient :

$$ay^4 - by^3 + \frac{3b^2y^2}{8a} - \frac{b^3y}{16a^2} + \frac{b^4}{256a^3} + by^3 - \frac{3b^2y^2}{4a} + \frac{3b^3y}{16a^2} - \frac{b^4}{64a^3} + cy^2 - \frac{bcy}{2a} + \frac{b^3c}{16a^2} + dy + \frac{4ae-bd}{4a} = 0$$

$$\Leftrightarrow ay^4 + \left(\frac{3b^2}{8a} - \frac{3b^2}{4a} + c\right)y^2 + \left(\frac{3b^3}{16a^2} - \frac{b^3}{16a^2} - \frac{bc}{2a} + d\right)y + \frac{4ae-bd}{4a} - \frac{b^4}{64a^3} + \frac{b^4}{256a^3} + \frac{b^2c}{16a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow ay^4 + \frac{8ac-3b^2}{8a}y^2 + \frac{2b^3-8abc-16a^2d}{16a^2}y + \frac{256a^3e-64a^2bd-3b^4+16ab^2c}{256a^3} = 0$$

L'équation (2.1) devient, après quelques calculs élémentaires : $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ (2.2).

$$\left(en\ posant,\ p' = \frac{8ac-3b^2}{8a}, \qquad q' = \frac{2b^3-8abc-16a^2d}{16a^2}, \quad r' = \frac{256a^3e-64a^2bd-3b^4+16ab^2c}{256a^3} \quad et\ p = \frac{p'}{a}, q = \frac{q'}{a}, r = \frac{r'}{a}\ (a \neq 0) \right)$$

Deuxième étape : Il est à présent question de déterminer des nombres (réels ou complexes) α, β et γ $(\alpha \neq 0)$ tels que (2.2) puisse se factoriser de la manière suivante :

$y^4 + py^2 + qy + r = (y^2 - \alpha y + \beta)(y^2 + \alpha y + \gamma) = 0$. En développant le produit proposé, on obtient :

$y^4 + py^2 + qy + r = y^4 + (\beta + \gamma - \alpha^2)y^2 + (\beta\alpha - \alpha\gamma)y + \beta\gamma = 0$, ce qui donne, par identification de polynômes :

$$\begin{cases} \beta + \gamma - \alpha^2 = p & (1) \\ \alpha(\beta - \gamma) = q & (2) \\ \beta\gamma = r & (3) \end{cases}$$

Des équations (1) et (2) on tire : $\beta + \gamma = p + \alpha^2$ *et* $\beta - \gamma = \dfrac{q}{\alpha}$ qui permettent d'obtenir par addition : $\beta = \dfrac{1}{2}\left(p + \alpha^2 + \dfrac{q}{\alpha}\right)$ et $\gamma = \dfrac{1}{2}\left(p + \alpha^2 - \dfrac{q}{\alpha}\right)$. En portant ces deux valeurs dans l'équation (3), il vient : $\left(p + \alpha^2 + \dfrac{q}{\alpha}\right)\left(p + \alpha^2 - \dfrac{q}{\alpha}\right) = 4r$ i.e. $(p + \alpha^2)^2 - \dfrac{q^2}{\alpha^2} = 4r \Rightarrow p^2 + 2p\alpha^2 + \alpha^4 - \dfrac{q^2}{\alpha^2} = 4r$

$$\alpha^6 + 2p\alpha^4 - (4r - p^2)\alpha^2 - q^2 = 0. \qquad (2.3)$$

Il en résulte que α^2 est une racine de l'équation du troisième degré suivante :

$$t^3 + 2pt^2 - (4r - p^2)t - q^2 = 0. \qquad (2.3) \qquad (\text{en posant } \alpha^2 = t)$$

Troisième étape : La résolution de l'équation (2.3) d'après les formules de Cardan permet d'obtenir successivement la valeur de α^2, puis celle de α et par conséquent celles de β et γ, grâce aux égalités $\beta = \frac{1}{2}\left(p + \alpha^2 + \frac{q}{\alpha}\right)$ et $\gamma = \frac{1}{2}\left(p + \alpha^2 - \frac{q}{\alpha}\right)$.

En revenant à $y^4 + py^2 + qy + r = (y^2 - \alpha y + \beta)(y^2 + \alpha y + \gamma) = 0$, on conclut alors que les solutions de l'équation (2.2) sont celles des deux équations du second degré suivantes : $y^2 - \alpha y + \beta = 0$ *et* $y^2 + \alpha y + \gamma = 0$, c'est-à-dire $y_{1,\,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$ et $y_{3,\,4} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$ (ce ne sont, S.V.P., que des notations, étant donné que les expressions écrites sous le radical peuvent être réelles (positives ou négatives) ou complexes !)

Les quatre solutions de l'équation (2.1) s'obtiennent finalement à l'aide d'une translation « inverse » d'après la formule : $x = y - \frac{b}{4a}$, ce qui donne symboliquement :

$$x_{1,\,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} - \frac{b}{4a} \quad \text{et} \quad x_{3,\,4} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} - \frac{b}{4a}.$$

Section 4 : EN GUISE DE CONCLUSION : QUE DIRE DES EQUATIONS ALGEBRIQUES DE DEGRE SUPERIEUR OU EGAL A 5, A UNE INCONNUE DANS C

Point n'est besoin de rappeler ici qu'il n'existe à ce jour pas de formule permettant de résoudre ce genre d'équations algébriques par radicaux (et jusqu'à preuve du contraire, on peut même affirmer qu'il n'en existera jamais, en se référant aux résultats établis dans la théorie de Galois).

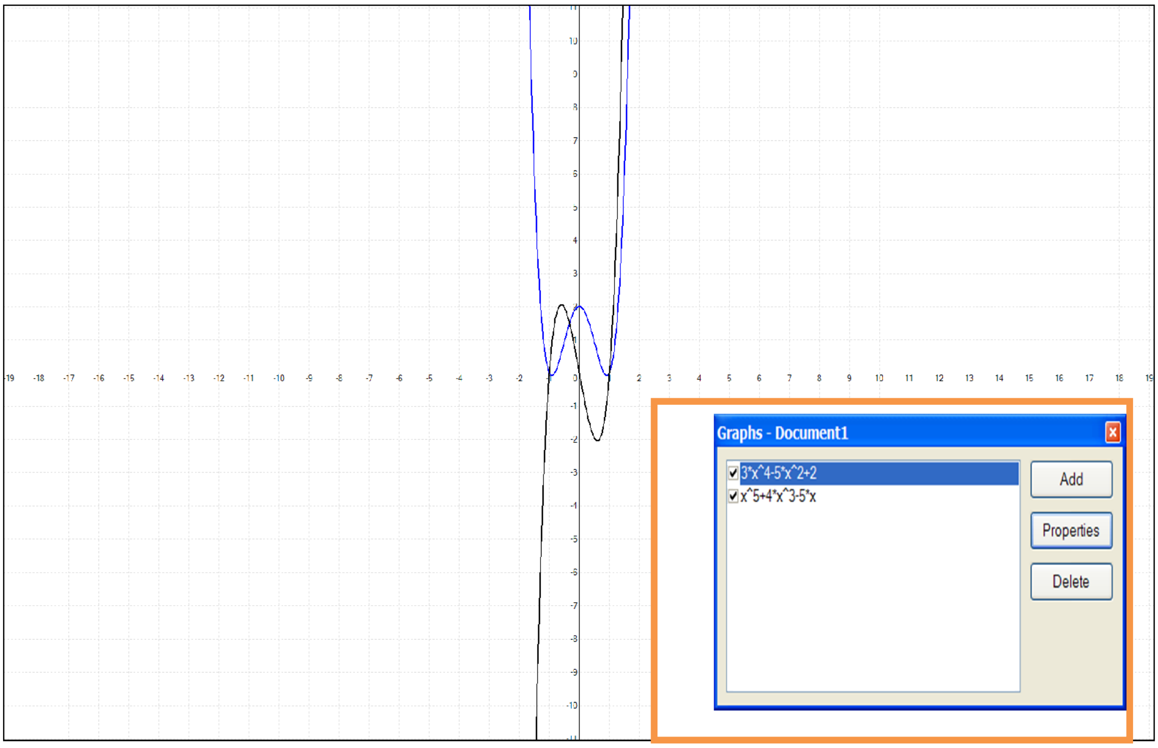
Doit-on cependant se restreindre aux méthodes algorithmiques rappelées précédemment pour ce genre d'équations, lesquelles méthodes sont considérablement limitées dans leur champ d'application puisque, comme nous l'avons établi, elles se fondent sur un postulat (l'existence d'une racine entière au moins) qui est faux dans le cas général ? Nous estimons que cela serait trop restrictif et réducteur pour un mathématicien professionnel ou pour un enseignant de mathématiques digne de ce nom. Que va-t-il faire, en effet, face à une équation algébrique du cinquième degré (ou d'un degré supérieur à 5) lorsqu'il constate qu'aucune de ces méthodes particulières ne conduit à la résolution de l'équation donnée ? Il lui reste alors la résolution par approximation à l'aide de méthodes graphiques ou par itération successive.

Il est, en effet, important de savoir qu'il existe une panoplie de méthodes graphiques ou itératives qui permettent de trouver une racine réelle d'une équation du cinquième degré (par exemple), dont on sait déjà qu'elle admet au moins une racine réelle du fait que son degré est impair (cfr. Proposition 1, section 2). Une valeur approchée de cette solution réelle peut être déterminée graphiquement par le raisonnement suivant (fondé sur l'étude des fonctions numériques réelles d'une variable réelle x. Une fois cette valeur approchée déterminée, l'équation donnée est factorisable en un produit d'un facteur linéaire et d'un autre du quatrième degré qui, lui, est résoluble par radicaux à l'aide des formules établies dans la section 3 de la présente étude.

Illustrons ce raisonnement par deux exemples concrets respectivement du cinquième et du sixième degrés (*étant entendu que ce même raisonnement peut être appliqué à une équation algébrique de n'importe quel autre degré*) :

Exemple 1 : Soit par exemple à résoudre l'équation $x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 5x - 2 = 0$ (dont on sait que l'une des solutions est $x = 1$) En regroupant dans le premier membre les termes de degré impair et, dans le second, ceux de degré pair, cette équation s'écrit sous la forme : $x^5 + 4x^3 - 5x = 3x^4 - 5x^2 + 2$. (Ce regroupement de termes est dicté par le souci de simplification de l'étude des deux fonctions générées par les deux membres de cette égalité : la première admet une dérivée première polynomiale et bicarrée, dont les racines seront aisément déterminée, la seconde est polynomiale et bicarrée, et sa dérivée première est une équation algébrique du troisième degré de la forme $x^3 + px + q = 0,$ dont nous connaissons déjà les formules de résolution par radicaux).

En posant que le premier membre de l'égalité précédente vaut $y,$ on conclut que cette égalité induit le système $\begin{cases} y = x^5 + 4x^3 - 5x \\ y = 3x^4 - 5x^2 + 2 \end{cases}$ dont les abscisses x des solutions éventuelles représentent les racines de l'équation algébrique proposée. Proposons-nous alors de résoudre graphiquement ce système. A l'aide d'une étude graphique complète de chacune des deux fonctions numériques réelles, d'une variable réelle $x,$ d'expressions analytiques respectives : $y = x^5 + 4x^3 - 5x$ et $y = 3x^4 - 5x^2 + 2$, on obtient les représentations graphiques suivantes :

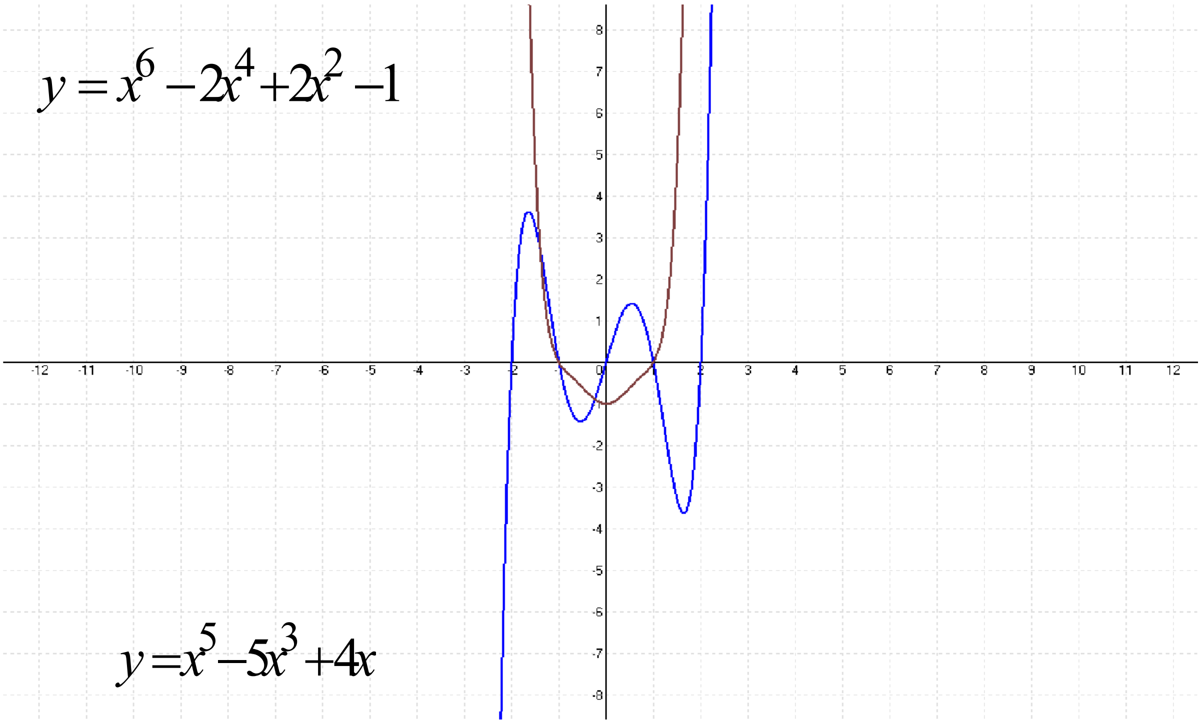


Ce graphique révèle clairement l'existence de deux racines entières 1 et -1 et d'une racine réelle dont une estimation raisonnable et vraisemblable est -0,35. Ces racines sont, bien entendu, les abscisses des trois points d'intersection des deux courbes d'équations respectives $y = x^5 + 4x^3 - 5x$ (en noir) et $y = 3x^4 - 5x^2 + 2$ (en bleu sur le graphique précédent, réalisé grâce au logiciel informatique FNGRAPH).

Faisons remarquer que l'estimation proposée pour la troisième solution réelle de l'équation proposée est bien acceptable, étant donné qu'une simple substitution dans cette équation nous donne : $(-0{,}35)^5 - 3(-0{,}35)^4 + 4(-0{,}35)^3 + 5(-0{,}35)^2 - 5(-0{,}35) - 2 \cong 0$. Les deux dernières racines de l'équation proposée se calculent aisément compte tenu du fait que le polynôme du cinquième degré proposé est divisible à la fois par $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ et par $x - 0{,}35$ et peut donc se décomposer en un produit de trois facteurs dont le dernier facteur est du second degré (résoluble à l'aide de formules classiques bien connues).

Nous précisons que la technique utilisée dans la résolution précédente peut être appliquée à n'importe quelle autre équation algébrique de quelque degré que ce soit … avec un peu d'artifices dans la définition des deux fonctions en jeu et relativement plus ou moins de difficultés dans leurs études graphiques respectives.

Exemple 2 : Soit par exemple à résoudre l'équation $x^6 - x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 1 = 0$. En procédant comme ci-dessus, i.e. en regroupant dans le premier membre les termes de degré impair et, dans le second, ceux de degré pair, cette équation s'écrit sous la forme : $x^5 - 5x^3 + 4x = x^6 - 2x^4 + 2x^2 - 1$. En posant que le premier membre de l'égalité précédente vaut y, on conclut que cette égalité induit le système $\begin{cases} y = x^5 - 5x^3 + 4x \\ y = x^6 - 2x^4 + 2x^2 - 1 \end{cases}$ dont les abscisses x des solutions éventuelles représentent les racines de l'équation algébrique proposée. Proposons-nous alors de résoudre graphiquement ce système. A l'aide toujours d'une étude graphique complète de chacune des deux fonctions numériques réelles, d'une variable réelle x, d'expressions analytiques respectives : $y = x^5 - 5x^3 + 4x$ et $y = x^6 - 2x^4 + 2x^2 - 1$, on obtient les représentations graphiques suivantes :



Inutile de préciser que, du graphique précédent, on déduit « aisément » les quatre solutions de l'équation donnée, notamment : $x \approx -1{,}4,\ x = -1,\ x \approx -0{,}25$ et $x = 1$. Les deux dernières racines (complexes) de l'équation donnée seront alors déterminées après une factorisation classique

$x^6 - x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 1 = (x + 1{,}4)\,(x + 1)\,(x + 0{,}25)\,(x - 1)\,(x^2 + ax + b),$ une détermination des coefficients a et b par identification de polynômes et une résolution de l'équation du second degré $x^2 + ax + b = 0$ ainsi obtenue (calculs élémentaires dont nous laissons le soin au lecteur intéressé de parachever cette résolution : ce qui compte pour nous étant la technique adoptée, les calculs auxiliaires étant relégués au second plan).

REFERENCES

[1] LORENT. S et LORENT R, *Algèbre 2A,* Editions A De BOECK, Bruxelles 1968.
[2] MUTAFIAN Claude, *Le défi algébrique*, Vuibert, Paris, 1984. (Tomes 1 et 2)
[3] MUTAFIAN Claude, *Equations algébriques et théorie de Galois*, Vuibert, Paris, 1985.