International Journal of Innovation and Scientific Research
ISSN 2351-8014 Vol. 13 No. 2 Feb. 2015, pp. 566-579

http://www.ijisr.issr-journals.org/

Optimisation linéaire du programme de production d'une société industrielle

[Linear optimization of the production program of an industrial company]

Moulay El Mehdi FALLOUL[1] and Moulay Ali FALLOUL[2]

[1]Doctorant en économie et finance appliquée,
Université Hassan II Mohammedia,
Mohammedia, Maroc

[2]Docteur en magnétisme et électricité,
Université Hassan II Casablanca,
Casablanca, Maroc

ABSTRACT: Linear programming is a very important tool for operational research. It is a generic tool that can solve many problems in engineering management. Indeed, once a problem modeled in the form of linear equations, methods ensure solving the problem exactly. Data and information needed to solve the problem and are assumed known in a certain way. The aim of this paper is to compute a linear program of production of an industrial company.

KEYWORDS: Linear optimization, duality theorem, canonical form, simplex, production process.

RESUME: La programmation linéaire est un outil très important de la recherche opérationnelle. C'est un outil générique qui peut résoudre un grand nombre de problème de l'ingénierie de gestion. En effet, une fois un problème modélisé sous la forme d'équations linéaires, des méthodes assurent la résolution du problème de manière exacte. Les données et informations nécessaires à la résolution du problème sont supposées et connues d'une manière certaine. L'objectif de ce papier est de calculer un programme linéaire de production d'une société industrielle.

MOTS-CLEFS: optimisation linéaire, théorème de dualité, forme canonique, simplex, processus de production.

1 INTRODUCTION

La programmation linéaire est un outil très important de la recherche opérationnelle. C'est un outil générique qui peut résoudre un grand nombre de problème de l'ingénierie de gestion. En effet, une fois un problème modélisé sous la forme d'équations linéaires, des méthodes assurent la résolution du problème de manière exacte. Les données et informations nécessaires à la résolution du problème sont supposées et connues d'une manière certaine. Ce qui place la programmation linéaire dans la famille d'aide à la décision en environnement certain. Les méthodes d'optimisation mathématiques sont aujourd'hui couramment utilisées dans le domaine des techniques industrielles et de l'ingénierie de gestion. Ces méthodes se caractérisent par le fait qu'elles permettent de tenir compte de contraintes données sous la forme d'inégalités. Généralement, on appelle programmation mathématique, la recherche de l'optimum d'une fonction de plusieurs variables liées entre elles par des contraintes liées entre elles par des contraintes sous forme d'égalités ou d'inégalités [1].

2 LES BASES MATHEMATIQUES DE LA PROGRAMMATION LINEAIRE

La Programmation linéaire se préoccupe de résoudre un problème mathématique, à savoir maximiser ou minimiser une fonction linéaire de n variables (appelés la fonction objective)

Avec m contraintes linéaires, qui est

$$\max imiser \quad ou \quad \min imiser \; z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \cdots\cdots + c_n x_n$$

Sous contraintes

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{1,n}x_n \leq> b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n \leq> b_2$$

$$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{3,n}x_n \leq> b_3$$

…………………………………………≤> …

………………………………………… ≤> …

$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{m,n}x_n \leq> b_m$$

Et les contraintes triviales $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \ldots.. x_n \geq 0.$

En termes matricielles, un modèle de programmation linéaire est

$$\max imiser \quad ou \quad \min imiser \; z = c^T \vec{x}$$

Tel que $A\vec{x} \geq< \vec{b} \quad \vec{x} \geq 0$

Où A est une matrice $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdots & a_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Les coefficients $c_1, c_2, c_3, \ldots., c_n$ sont appelés coefficients de coût.

La programmation linéaire est une technique mathématique largement utilisée, conçue pour aider les gestionnaires et les ingénieurs dans la planification et la prise de décisions relatives à l'affectation des ressources .

La programmation linéaire est si importante, parce que tant de problèmes différents dans de nombreux domaines diversifiés sont modélisé mathématiquement par le problème mathématique de programmation linéaire, à savoir

$$\max imiser \quad ou \quad \min imiser \; z = c^T \vec{x}$$

Tel que

$$A\vec{x} \geq< \vec{b} \quad \vec{x} \geq 0 .$$

En effet la solution des problèmes de programmation linéaire dans l'industrie, gouvernements et établissements universitaires partout dans le monde représente l'un de la plus grande quantité de temps de calcul en calcul scientifique (par opposition au traitement des données) [2].

Voici quelques-uns des principaux domaines où la programmation linéaire a été largement et avec succès appliqué :

(1)Optimisation d'une raffinerie de pétrole.
(2)Répartition de la production
(4)Problèmes de distribution
(5)Planification financière et économique

Vue d'ensemble

Programmation quadratique

$$\begin{Bmatrix} Max \\ Min \end{Bmatrix} f(x_1 \cdots x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots, x_n^2$$

Fonction objective linéaire

Sous réserve de m contraint linéaires

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \leq\geq= b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \leq\geq= b_2$$

$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n \leq\geq= b_m$$

Programmation linéaire

$$\begin{Bmatrix} Max \\ Min \end{Bmatrix} f(x_1 \cdots x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

fonction objective non linéaire

sous réserve de m contraintes linéaire

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \leq\geq= b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \leq\geq= b_2$$

Programmation géométrique

$\begin{Bmatrix} Max \\ Min \end{Bmatrix} f(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n)$ -- fonction objective non linéaire

Sous réserve de m contraintes non linéaire

$$\{g_1(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n) = 0$$
$$\{g_2(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n) = 0$$

$$\{g_{m-1}(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n) = 0$$
$$\{g_m(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n) = 0$$

Programmation mathématique ou Non linéaire

Trouver le vecteur $\vec{t}$ tel que

Min fonction $g_0(\vec{t})$

Tel que $t_1 > 0, t_1 > 0, \cdots, t_n > 0$

et $g_1(\vec{t}) \leq 1$, $g_2(\vec{t}) \leq 1$

----

et $g_k(\vec{t}) = \sum_{j=1}^{k} P_j(\vec{t})$ et $P_j(\vec{t}) = c_j \prod_{i=1}^{j} t_i^{G_{i,j}}$.

3 QUELQUES DEFINITIONS IMPORTANTES

La forme générale d'un modèle de programmation linéaire se compose de :

(i) un objectif à maximiser ou minimiser certains z quantité, appelée la fonction objective, qui s'exprime comme une combinaison linéaire des variables.
(ii) des contraintes non négligeables sur les variables qui sont des inégalités ou équation mettant en cause des combinaisons linéaires des variables.
(iii) des contraintes de positivité sur les variables pour s'assurer que chacun d'eux est positive ou nulle.

Il peut être exprimé mathématiquement comme suit :

Optimiser $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots\cdots + c_nx_n$

Sous c/t

$$
\begin{array}{l}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{1,n}x_n \le b_1 \,/ = /\, \ge b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n \le b_2 \,/ = /\, \ge b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{i,n}x_n \le b_i \,/ = /\, \ge b_i \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{n,n}x_n \le b_n \,/ = /\, \ge b_n \,.
\end{array}
$$

Tel que $x_i \ge, =, \le 0,\ i = 1,2,3,\cdots,n$

$c_j\,(j = 1,2,3\cdots,n)$ (appelés les coefficients de coût)

$a_{i,j}\,(i = 1,2,\cdots,m,\ j = 1,2,\cdots,n)$ et $b_i\,(i = 1,2,\cdots,m)$ sont les paramètres du modèle.

Nous devrions inclure les coûts d'exploitation c (qui sont censés pour être constant, bien qu'il soit souvent commode de les omettre) dans la fonction objective. Cependant que nous changeons effectivement la fonction objective du bénéfice z'

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z' - c$$

Où c représente le total de la valeur de la constante. Par conséquent, il est important, lors de la résolution des problèmes de programmation linéaires de ne pas oubliez pas d'ajouter de la valeur de tous les termes constants omises dans la fonction objective à la valeur maximale (ou minimale) de z afin de déterminer la valeur correcte du profit maximum (ou coût minimum). Maintenant, il est très important que nous sommes en mesure de convertir la forme générale d'un problème de programmation linéaire en une forme standard, car si nous avons un problème de programmation linéaire sous forme standard, nous pouvons obtenir quelques résultats théoriques très puissants [3].

4 THÉORÈME DE DUALITÉ

Un modèle de programmation linéaire est de **forme classique**, si elle est exprimée sous la forme :

Maximiser $z = c^T x$

sous $A\vec{x} \le \vec{b}$, $\vec{x} \ge 0$.

Aucune restriction sur le signe de $\vec{b}$.

Pour convertir un modèle de programmation linéaire sous forme standard, nous procédons comme suit :

(1) Supprimer tout terme c constant de la fonction objectif en remplaçant

$z' = \vec{c}^{\,T}\vec{x} + c$ par $z = \vec{c}^{\,T}\vec{x}$ tel que $z = z' - c$.

(2) Si le problème est un problème de minimisation

Minimiser $z' = \vec{c}'^T \vec{x}$,
Le réécrire comme maximiser $z = \vec{c}^T \vec{x}$

Tel que $z = -z'$ et $c = -c'$.

(3) supprimer toutes les variables libres x_j en définissant $x_j = x_j^+ - x_j^-$ où $x_j^+ \geq 0$ et $x_j^- \geq 0$
Et en remplaçant x_j par $x_j = x_j^+ - x_j^-$ où on le trouve dans la fonction objective et les contraintes.

(4) supprimer toute contrainte de l'égalité telles que

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{i,n}x_n = b_i$$

Soit en éliminant une des variables x_j en écrivant

$$x_j = \frac{1}{a_{i,j}}(b_i - \sum_{k \neq j}^{n} a_{i,k}x_k) \text{ tel que } (a_{i,j} \neq 0)$$

Et en remplaçant x_j chaque fois qu'il se produit dans la fonction objective et les contraintes, par cette combinaison de l'autre ($n-1$) variables

Ou en la remplaçant par les deux $\leq$ inégalités suivantes :

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{i,n}x_n \leq b_i$$

$$-a_{i,1}x_1 - a_{i,2}x_2 - a_{i,3}x_3 - \cdots\cdots - a_{i,n}x_n \leq -b_i$$

(5) changer chaque contrainte $\geq$, tels que

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{i,n}x_n \geq b_i$$

Pour une contrainte $\leq$ en changeant tous les signes

$$-a_{i,1}x_1 - a_{i,2}x_2 - a_{i,3}x_3 - \cdots\cdots - a_{i,n}x_n \leq -b_i$$

(6) si nécessaire renommer les variables.

La forme canonique : la **forme standard** est important puisqu'il nous permet d'accéder quelques résultats théoriques puissants à savoir, le théorème de la dualité. Cependant, une autre forme très importante du problème de programmation linéaire est la **forme canonique** qui mène à la méthode générale de la solution des problèmes de programmation linéaires, à savoir la méthode ou un algorithme plus simple. Dans la **forme canonique**, les inégalités sont transformées à des égalités par l'introduction de variables supplémentaires [4].

Définition Un modèle de programmation linéaire est sous **forme canonique**, s'il est exprimé sous la forme :

Maximiser $z = \vec{c}^T \vec{x}$
Tel que $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} \geq 0$, $b \geq 0$

T**ous les signes doivent être choisis pour que** $b \geq 0$. $\vec{x}$ doit être $\vec{x} \geq 0$.

Pour exprimer un modèle de programmation linéaire sous forme canonique

(i) Supprimer toute terme c constant de la fonction objectif en remplaçant

$z' = \vec{c}^{\,T}\vec{x} + c$ by $z = \vec{c}^{\,T}\vec{x}$ tel que $z = z' - c$.

(ii) Si le modèle est un modèle de minimisation, c'est-à-dire minimiser

Minimiser $z' = \vec{c}\,'^{T}\vec{x}$
Réécrire comme maximiser $z = \vec{c}^{\,T}\vec{x}$
où $z = -z'$ et $\vec{c} = -c'$

(iii) supprimer toutes les variables libres x_j en définissant $x_j = x_j^+ - x_j^-$ où $x_j^+ \geq 0$ et $x_j^- \geq 0$
et en remplaçant x_j par $x_j = x_j^+ - x_j^-$ partout où il existe dans la fonction objective et les contraintes.

(iv) pour toute $b_i < 0$, changer tous les signes dans la contrainte correspondante et l'inversion de tout signe d'inégalité.

(v) (i) convertir toute contrainte de la forme

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{i,n}x_n \leq b_i$$

À une égalité **en ajoutant une** variable x_{n+i} pour donner

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{i,n}x_n + x_{n+i} = b_i \text{ où } .$$

(iv) Convertir toute contrainte de la forme

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{i,n}x_n \geq b_i$$

À une égalité **en soustrayant une** variable d'excédent x_{n+i} pour donner

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{i,n}x_n - x_{n+i} = b_i \text{ tel que } x_{n+i} \geq 0$$

(v) Etendre $\vec{c}$ pour inclure des éléments nuls $\vec{c}_{n+i}$ pour les variables excédentaires x_{n+i} Si nécessaire et si renuméroter les variables.

5 FORME EQUIVALENTE ET TABLEAU SIMPLEXE

Lorsqu' une base B est disponible, on peut transformer le problème sous la forme

$$\begin{aligned} &Z = \min z = c_B x_B + c_R x_R \\ &B x_B + R x_R = d \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

En séparant indices de vase et hors base :

$$c_B(1\times m), c_R(1\times n-m), B(m\times m), R(m\times n-m); x_B(m\times 1), x_R(n-m\times 1),$$
$$T=(B,R)$$
$$x=(xB)$$
$$c=({}^{C}B, {}^{C}R)$$

et avec

$x_B=(x, i\in I),$ m variables de vase

$x_R=(x, i\in I),$ n-m variables hors base

La solution de vase admissible initiale vaut :

$$\left| \begin{array}{l} x_B = B^{-1}d \geq 0 \\ x_R = 0 \end{array} \right.$$ (par l'hypothèse H2)

Le problème peut se mettre sous une forme équivalente en[5] :

- diagonalisant les contraintes par rapport aux variables de vase (à l'instar de ce qui se fait dans la méthode de Gauss de résolution d'un système linéaire) ;
- éliminant les variables de vase dans l'expression de la fonction économique.

Il vient, par multiplication par B^{-1}

$$x_B + B^{-1}R_{XR} = B^{-1}d$$

et donc, en remplaçant x_B

$$z = c_B B^{-1}d - (c_B B^{-1}R - c_R)x_R$$

pour simplifier, introduisons des notations qui seront abondamment utilisées.

Posons

$B^{-1}R = A = (a_{ij}, j\in J)$ de dimension (m x n – m)

$B^{-1}t_j = a_j, j\in J, j^e$ vecteur colonne de A

$B^{-1}d = (a_{i0}, i\in I) = a_0$ de dimension (m x 1)

$C_B B^{-1}R + c_R = (a_{0j}, j\in H) = \alpha_0$ de dimension (1 x n –m)

(par conséquent $c_B B^{-1}t_j - c_j = a_{0j}$

Le problème, mis sous sa forme équivalente, s'écrit maintenant

$$\min z = a_{00} - \sum_{j\in J} a_{0j}x_j$$

$$x_i + \sum_{j\in J} a_{0j}x_j = a_{io} i\in I$$

$$x\geq 0$$

Ou, en notation vectorielle,

$$z = a_{00} - \alpha_0 x_R$$
$$x_B + Ax_R = a_0$$
$$x \geq 0$$

Les coefficients de cette forme équivalente constituent le tableau simplexe (à m+1 lignes et à n-m+1 colonnes), que l'on peut donc associer à chaque solution de base.

		$x_j\ j \in J$ (Variables hors base)
z	a_{00}	a_{0j}
$x_i i \in I$ (variables De base)	a_{i0}	a_{ij}

L'intérêt du tableau simplexe est évident : la simple lecture de la première colonne (celle des termes indépendants de la forme équivalente) fournit .

a_{00} la valeur actuelle de la fonction économique ;

a_{io} la valeur de la variable de base $x_i, i \in I,$

Les variables $x_j, j \in J,$ hors base sont par définition égales à zéro, quand la solution de vase est admissible (comme supposé ici) ; toutes les valeurs $a_{io}, i \in I$, sont non négatives [5].

Remarques

1. De $B^{-1}t_j = a_j, j \in J,$ il vient

$$t_j = \sum_{i \in I} a_{ij} t_{i;} \qquad j \in J$$

Les coefficients a_{ij} du tableau simplexe sont donc les coefficients de la commination linéaire des vecteurs de vase t_i $(i \in I)$ qui exprime de manière unique le vecteur lors base t_j .

A l'une ou l'autre occasion, il sera utile de considérer le tableau simplexe, dit complet, avec toujours m+1 lignes mais n+1 colonnes :

		$x_i i \in I$	$x_j j \in J$
z	a_{00}	0	a_{0j}
$x_i i \in I$	a_{i0}	I	a_{ij}

Où I est la matrice identité (m x m).

Les m colonnes supplémentaires, relatives aux m variables de base, sont toujours les mêmes et constituèrent dès lors généralement une information superflue.

D'où ressort de la définition de la matrice $A = B^{-1}R$ - ou (I,A) = $B^{-1}T$ dans le cas du tableau simplexe complet- que lorsque la matrice T contient une matrice unité I (par exemple relative à des variables d'écart) , la sous-matrice de (I,A)relative aux indices des colonnes formant cette matrice unité, correspond à l'inverse de la matrice de base[5] :

$$I \in T \Rightarrow B^{-1} \in (I, A).$$

Propriétés fondamentales de la programmation linéaire

- Propriété de caractérisation de l'absence de solution optimale finie.

Soit une solution de base admissible ; s'il existe $k \in J$ tel que

$$\left| \begin{array}{l} a_{0k} \rangle 0 \\ a_{ik} \leq 0, \forall i \in I, \end{array} \right.$$

la fonction économique z peut prendre une valeur aussi petite que l'on veut, c'est-à-dire qu' il n'y a pas de solution optimale finie .

<u>Démonstration</u>

Puisque $a_{ik} \leq 0, \forall i \in I$, la solution définie par[(2)]

$$\left| \begin{array}{l} x_j = 0, j \in J - k \\ x_k = x_k^* \rangle 0 \\ x_i) a_{io} = a_{ik}, i \in I \end{array} \right.$$

est encore une solution admissible (mais non de base), quelle que soit la valeur positive de x_k^*

Or, pour cette solution admissible, on a

$$z = a_{00} - a_{ok} x_k^*;$$

étant donné $a_{ok} \rangle 0$, il vient $z \to -\infty$ pour $x_k^* \to +\infty$

[(2)] *Par facilité d'écriture, nous écrirons J-k au lieu de la notation ensembliste J/(k)*

Cette absence de solution optimale finie se caractérise donc au niveau du tableau simplexe par la situation

	k
	$\rangle 0$
≥ 0	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ ≤ 0 $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

- Propriété d'amélioration d'une solution de base admissible

Soit une solution de vase admissible et supposons que $\forall k \in J$ tel que $a_{ok} \rangle 0$, il existe au moins un indice $i \in I$ pour lequel $a_{ik} \rangle 0$ (contrairement à la situation de la propriété II.2.1).

Définissions l'indice L par la relation

$$\frac{a_{lo}}{a_{lk}} = \min(\frac{a_{io}}{a_{ik}})$$

Si on remplace dans la base le vecteur de vase t_l par le vecteur hors base t_k, on obtient une nouvelle base correspondant à une solution de base admissible meilleure – ou aussi bonne- que la précédente du point de vue de la fonction économique ,

<u>Démonstration</u>

Comme dans la démonstration précédente, considérons la solution

$$\left\| \begin{array}{l} x_j = 0, J \in J - k \\ x_k = x_k^* \rangle 0 \\ x_i = a_{i0} - a_{ik} x_k^* \in I \end{array} \right.$$

Pour que cette solution soit admissible, il faut et il suffit que $x_i \geq 0 \forall i \in I$ c'est –à-dire il faut et il suffit que

$$x_k^* \leq \min\left(\frac{a_{i0}}{a_{ik}}\right)$$

En prenant

$$x_k^* = \min\left(\frac{a_{i0}}{a_{ik}}\right) = \frac{a_{l0}}{a_{ik}}$$

une nouvelle solution admissible est définie :

$$\left| \begin{array}{l} x_j = 0; j \in J - k \\ x_k = x_k^* \rangle 0 \\ x_i = a_{i0} - \dfrac{a_{ik} a_{l0}}{a_{lk}}, i \in I - l \\ x_l = 0 \end{array} \right.$$

En vertu de la remarque 1. du paragraphe II. et du fait que a_{ik} #0, la matrice (m x m) formée des vecteurs $t_i (i \in I - l)$ et t_k , est une matrice de base (compte tenu du dernier point du paragraphe I.3.1) la nouvelle solution obtenue est la solution de base correspondante .

De plus la fonction économique prend la nouvelle valeur.

$$z = a_{00} - a_{ok} x_k^* = a_{00} - \frac{a_{ok} a_{l0}}{a_{lk}}$$

Ce qui représente une valeur inférieure (ou égale, dans le cas particulie

$a_{l0} = 0$:) à la valeur précédente a_{00}

Cette propriété qui servira de base à une itération de l'algorithme simplexe, se caractérise donc au niveau du tableau simplexe par la situation .

		$\vdots$	
$\leftarrow$		$\rangle 0$	k
calcul		$\vdots$	
de			
L $\Leftarrow \dfrac{a_{i0}}{a_{ik}}$	≥ 0	$\rangle 0$	
		$\vdots$	
		$\rangle 0$	
		$\vdots$	

- Test d'arrêt : obtention d'une solution de base optimale

Soit une solution de vase admissible. Une condition suffisante, et nécessaire si le problème est non dégénéré, pour que cette solution soit optimale, est que $\forall J \in J$ ait $a_{0j} \leq 0$.

Démonstration .

Etant donné $z = a_{00} - \sum_{j \in J} x_j$, il est claire que le minimum de z sous les conditions $x_j \geq 0$ est atteint pour $x_j = 0 \forall j \in J$ et que la condition est suffisante Des deux propriétés précédentes, il résulte que la condition est nécessaire, mais uniquement si la solution pas nécessairement, s'il existe un indice $l \in I$ tel que $a_{l0} = 0$ et $a_{ik} \rangle 0$, l'amélioration de la fonction économique.

L'obtention d'une solution de base optimale finie se caractérise donc au niveau du tableau simplexe par la situation.

	≤ 0
≥ 0	

Remarque

Nous soulignerons au paragraphe II.6 qu'à une même solution de base admissible dégénérée, correspondent plusieurs bases et donc plusieurs tableaux simplexes différents. Lorsqu' une solution de base dégénérée est optimale, parmi les bases qui lui correspondent, il en existe au moins une pour laquelle les coefficients du tableau simplexe vérifient $a_{0j} \leq 0$ [5].

- **Interprétation géométrique**

L'interprétation géométrique des trois propriétés ci-dessus est essentielle à la bonne compréhension de l'algorithme simplexe. Cette interprétation sera illustrée sur un exemple au paragraphe II.4.

Nous supposerons ici qu'il n'y a pas dégénérescence.

Soit une solution de base admissible, c'est-à-dire un sommet de D ; elle correspond à l'intersection de n hyperplans

$$\alpha_i x) d_i \qquad i = 1, ..., m$$

$$x_j) 0 \qquad j \in J$$

La non-dégénérescence de cette solution courante $x_i = 0$ signifie qu'elle n'est située sur aucun des m hyperplans $x_i = 0 \quad i \in I$

Augmenter une (et une seule) variable hors base x_k - de son niveau actuel «zéro à un niveau positif- consiste à se déplacer, à partir de ce sommet, le long d'une arête qui en est issue ; il y a donc n-m arêtes issues de ce sommet. Si le coefficient a_{0k} du tableau simplexe est strictement positif (négatif) ; cette direction de déplacement entraîne une diminution (augmentation) de la fonction z ; un a_{0k} nul signifie que la fonction z reste stable le long de l'arête correspondant à la variation de x_k [6].

Pour améliorer la valeur de la fonction économique, il est donc nécessaire de déterminer une arête le long de laquelle z diminue, c'est-à-dire de déterminer une variable hors base x_k telle que $a_{0k} \rangle 0$.

Si une telle arête n'existe pas ; il n'est pas possible d'améliorer la valeur de la solution courante est une solution optimale.

Supposons qu'une telle arête existe $(\exists x_k / a_{0k} \rangle 0)$; le gradient de z étant constant (vu le caractère linéaire de z) , il est avantageux de déplacer la solution courante le plus loin possible le long de cette arête .

La seule limite au déplacement est de ne pas sortir du domaine d'admissibilité D : il convient donc, sous peine de voir une variable devenir négatrice, d'arrêter le déplacement dès qu'est atteint un des m hyperplans $x_i = 0, i \in I$.

Rappelons que le problème est sous forme standard : si la variable $x_i, i \in,$ est une variable d'écart, l'hyperplan $x_i = 0$ est celui correspondant à une contrainte réelle d'inégalité $\alpha_i x \geq d_i$.

La direction de déplacement choisie $(x_k \square\ )$ coupe l'hyperplan $x_i = 0$ si $a_{ik} \rangle 0$; la distance (mesurée en terme d'augmentation de la variable x_k) à parcourir le long de cette arête vaut $\frac{a_{i0}}{a_{ik}}$.

6 DONNÉES ET RÉSULTATS

L'entreprise Ab mécanique fabrique divers modèles d'appareils mécaniques. Suite à une réunion, il a été convenu d'examiner la possibilité de modifier le programme actuel de fabrication des pompes à eau, soit 600 unités de son T 12 et 200 unités de son modèle T56. L'assemblage se fait essentiellement en deux phases et, par la suite, un contrôle de qualité est effectué sur toutes les unités. Le tableau suivant donne l'information concernant le nombre d'heures exigées pour fabriquer chaque modèle ainsi que les disponibilités en heures de chaque atelier.

Tableau 1. Tableau des données

	Nombre d'heures de travail		
Ateliers	T12	T56	Heures disponibles
Premier assemblage	3	4	4200
Deuxième assemblage	2	3	2250
Contrôle de qualité empaquetage	1	1	2600

Étant donné la situation du marché, l'entreprise ne veut pas fabriquer plus de 1500 unités du modèle électronique T 12

La contribution au bénéfice du modèle T12 est de 60 l'unité alors que celle du modèle T56 est de 70

On veut déterminer le programme optimal de fabrication à mettre en œuvre c'est-à-dire
Celui qui maximiserait les bénéfices.

Variables de décision :
x1 : le nombre d'unités à fabriquer du modèle T12
x2 : le nombre d'unités à fabriquer du modèle T56

Les contraintes sont :

C1 : 3x1 + 4x2 ≤4200
C2 : x1 + 3x2 ≤2250
C3 : 2x1 + 2x2 ≤2600
C4 : x1 ≤ 1500 unités

x1 ≥0, x2 ≥0

La fonction économique à **maximiser** est

Z = 60x1 + 70x2

Dans le tableau de la cellule cible : la fonction réalise une valeur optimale de 94000 réalisée quand les variables quand les variables décision (cellules variables) prennent les valeurs x1= 1000 et x2 = 3000.

Dans le tableau contraintes : le terme Etat désigne si la contrainte est saturée ou non (liée ou non). C'est le cas des deux contraintes qui passent par le point optimal. (1000 ; 3000). Le terme marge désigne l'écart observé sur la marge de contrainte à l'optimum.

Tableau 2. Tableau d la cellule cible

Cellule	Nom	Valeur initiale	Valeur finale
$F$12	total quantités des ressources	0	94000

Tableau 3. Tableau des cellules variables

Cellule	Nom	Valeur initiale	Valeur finale	Entier
$B$2	Nombre d'unités T12	0	1000	Entier
$C$2	Nombre d'unités T56	0	300	Entier

Tableau 4. Tableau de la cellule cible

Cellule	Nom	Valeur de la cellule	Formule	État	Marge
$D$5	Assembalge phase 1	4200	$D$5<=$F$5	Lié	0
$D$6	Assemblage phase 2	1900	$D$6<=$F$6	Non lié	350
$D$7	Verification et empaquetage	2600	$D$7<=$F$7	Lié	0
$D$8	Quantité de T12	1000	$D$8<=$F$8	Non lié	500
$B$2	Nombre d'unités T12	1000	$B$2>=0	Non lié	1000
$C$2	Nombre d'unités T56	300	$C$2>=0	Non lié	300
$B$2:$C$2=Entier					

7 Conclusion

Nombreux sont les problèmes de décision qui utilisent un modèle de programmation mathématique. Ici, on s'est intéressé au cas où la fonction à optimiser ainsi que toutes les contraintes sont linéaires. Etant donné que le modèle est relativement général et permet de traiter une quantité de problèmes d'ingénierie et qu'il existe des algorithmes extrêmement efficaces pour obtenir des solutions, les applications qui ont été faites de la programmation linéaire, ces dernières années sont très variées. La méthode simplex développée par George Dantzig a conduit à plusieurs algorithmes généraux qui permettent de résoudre aisément des problèmes de grande taille (plusieurs dizaines de milliers de variables et plusieurs milliers de contraintes).

References

[1] M. L, Beale, "Introduction to Optimization", First Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1988.
[2] G. B.Dantzig, "Linear Programming and Extensions", First Edition Princeton University Press, 1963.
[3] R. Dorfman, P. A.Samuelson, R. M. Solow, " Programmation linéaire et gestion économique", Dunod , 1962.
[4] M .Simonard : "Programmation linéaire". First Edition. Dunod, 1962.
[5] J.Teghem, Programmation linéaire, statistiques et mathématiques appliqués, éditions de l'université libre de Bruxelles, première édition, 1996.
[6] G. Hadley, "linear programming", First Edition, Addison –Wesley, 1962.