International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 21 No. 1 Aug. 2017, pp. 137-152

http://www.ijias.issr-journals.org/

Bases logiques de l'incomplétude

A.-Roger LULA BABOLE[1-2], Alain MUSESA LANDA[3], and Oscar LUNGIAMBUDILA MAMONA[3]

[1]Département de Mathématiques et Informatique, Université de Kinshasa, RD Congo

[2]Faculté de Philosophie, Université Catholique du Congo, RD Congo

[3]Département de Mathématiques et Informatique, Université de Kinshasa, RD Congo

ABSTRACT: The study presents systematically the formals and theoretical foundations of incompleteness theorem: framework, hypothesis, rules of provability. The recursive functions constitute the operational foundations in the development, the construction and the prove of this theorem. The preparatory theorems and the sense theorem are the socle which establishes the incompleteness.

KEYWORDS: sense theorem, recursive functions, expansivity, recessivity, diagonal argument.

RESUME: L'étude présente systématiquement et méthodiquement les fondements théoriques et formels du théorème d'incomplétude : cadre, hypothèses, règles de prouvabilité. Les fonctions récursives constituent et servent de soubassements opératoires dans le développement, la construction et la preuve dudit théorème. Les théorèmes préparatoires et le théorème du sens sont les socles établissant l'incomplétude.

MOTS-CLEFS: théorème, du sens, fonctions récursives, expansivité, récessivité, argument diagonal.

1 LE SYSTÈME FORMEL DE GÖDEL (SFG)

GÖDEL a eu à prouver ses célèbres résultats sur l'incomplétude en se fondant sur une extension P du système des *Principia Mathematica* auquel on a ajouté les axiomes de l'arithmétique de PEANO. Il est question ici de traduire des énoncés du métalangage de l'arithmétique de PEANO dans le langage objet de l'arithmétique. En effet, on note que les objets du langage sont des nombres, ceux du métalangage sont des assertions sur les nombres.

Les symboles ou signes primitifs de SFG sont composés de :

- $(1)\ de\ constantes\ primitives\ \ll \neg \gg, (non), \ll \vee \gg\ (ou), (\forall)(pour\ tout), \ll 0 \gg\ (zéro), \ll' \gg$ $(fonction\ successeur, \ll\ (\gg\ et\ \ll)\ \gg\ (parathèses), et$
- $(2)\ de\ variables\ pour\ tous\ les\ types, x_1, y_1, z_1, \dots pour\ le\ premier\ type,$

  x_2, y_2, z_2 pour le deuxième, x_3, y_3, z_3 pour le troisième… x_n, y_n, Z_n pour le $ième$ type.

Les termes de premier type sont tous les termes a, a', a'', a''', où a est soit 0, soit une variable de type 1, ou variable d'entier. Les termes de deuxième type sont tous les termes $b, b', b'', b''', \dots$ où b est une variable de type 2 ou variable d'ensemble d'entiers. Les termes de troisième type sont tous les termes $c, c', c'', c''', \dots$ où c est une variable de type 3 ou variable d'ensemble d'entiers[1].

Une expression ayant la forme $a(b)$, où b est un terme de type n et a , un terme de type n+1, est une formule simple ou élémentaire. On définit l'ensemble des formules par le plus petit ensemble X satisfaisant les conditions suivantes :

- (1) X contient toutes les formules simples et
- (2) $si\ a, b \in X\ et\ x$, une variable quelconque, alors $\neg a, (a \vee b) et\ \forall x a$ sont des formules appartenant à X.

Si n est le nombre de variables libres de a, alors a est dit une formule close si $n = 0$ et que a est une relation si $n > 0$ et pour $n = 1$, on est en présence d'un signe de classe ou prédicat.

Soient $\mathcal{F}$, un ensemble des formules prouvables et f, une formule. On dit que f est prouvable si :

$\exists (f_1, \dots f_n) \in \mathcal{F}^n$ tel que :

- $f_n = f$
- $\forall i \leq n, on\ a\ f_i$ est un axiome ou une conséquence immédiate d'un ou de plusieurs $f_j (j < i)$

Les axiomes donnés par GÖDEL, dans le cadre de sa métamathématique, reprennent les axiomes de PEANO, les axiomes de la logique d'où on déduit toutes les tautologies, les axiomes sur le quantificateur universel et les axiomes de compréhension, ainsi que les axiomes d'extensionalité.

2 AXIOMES DE SFG

GÖDEL a formulé les axiomes de SFG sous forme des schémas. Ceux-ci utilisent les constantes du système, les opérateurs propositionnels et des variables syntaxiques.

Les axiomes de SFG ainsi formulés sont toutes les propositions obtenues à partir des schémas suivants en remplaçant les variables syntaxiques qui y figurent par des expressions correspondantes de SFG.

I. Toutes les formules résultant d'un des schémas suivants sont des axiomes (Schémas correspondant aux axiomes de PEANO) :

1. $\neg\, x_1' = 0$

Zéro n'est successeur d'aucun entier.

2. $x_1' = x_2' \rightarrow x_1 = x_2$

Si les successeurs de deux nombres entiers sont égaux, ces nombres sont égaux.

3. $\left(y_1(0) \wedge \forall x_1 y_1(x_1) \longrightarrow y_1(x_1')\right) \longrightarrow \forall_{x_1} y_1(x_1)$

Schéma d'induction, si une partie A de N contient 0 et est stable par s, alors A est égale à A, l'application s est donc injective.

II. Toutes les formules résultant des schémas suivants où $p, q\ et\ r$ des formules sont des axiomes[2]:

1. $(p \vee p) \longrightarrow p$
2. $p \longrightarrow (p \vee q)$

---

[1] *La théorie des types de RUSSELL : dans la théorie des types, il est attribué à chaque variable un domaine de signification, son type logique ; ces types sont numérotés à partir de 1, et une proposition n'est signifiante que si et seulement si le type logique de chacun de ses termes est strictement inférieur à ceux des termes auxquels ce terme s'applique. La notion de prédicat qui s'applique à lui – même est ainsi déclarée non signifiante.*

[2] *Pour ce qui regarde les axiomes 1-4 pour les propositions, il a été montré par P. BERNAYS qu'aucun d'entr'eux n'est conséquence des trois autres. Cfr. P. BERNAYS, ''Axiomatische Untersuchung'' des Aussagenkal Küls der P.M., Math. Zeischrift, 25, 1926.*

3. $(p \vee q) \longrightarrow (q \vee p)$
4. $(p \longrightarrow q) \longrightarrow ((r \vee p) \longrightarrow (r \vee q))$

III. Toutes les formules résultant d'un des schémas suivants sont des axiomes :

1. $\forall_x a \longrightarrow sub(a, x, c)$
2. $\forall_x (b \vee a) \longrightarrow b \vee \forall x a$

Où x est une variable quelconque, b est une formule ne contenant pas x comme variable libre et c est une relation métathéorique.

IV. Les formules résultant des schémas suivants sont des axiomes :

1. $\exists y(\forall x(y(x) \equiv a))$

Où a est une formule sans occurrences libres de y et ne contient pas x comme variable libre. Cet axiome est dit axiome de compréhension[3]. Ce schéma correspond à l'axiome de réductibilité de RUSSELL et WHITEHEAD et à l'axiome de sélection[4] de la théorie des ensembles.

2. $\forall x_1(y_1(x_1) \leftrightarrow y_2(x_1)) \longrightarrow y_1 = y_2$

C'est l'axiome d'extensionalité[5].Deux prédicats, qui se vérifient des mêmes objets, permettent d'être considérés comme identiques. En somme, ce schéma indique qu'une classe est entièrement caractérisée par ses éléments.

La prouvabilité des expressions ou formules dans le système SFG et le système étendu repose sur les règles inférentielles que sont le modus ponens et la généralisation. Ainsi, une formule c'est une conséquence immédiate des formules a et b, si a est la formule $(b \longrightarrow c)$ ou si a est $\forall x a$ où x est une variable quelconque. De même que l'ensemble des formules prouvables est formé d'un plus petit ensemble X tel que :

- Les axiomes de cet ensemble sont dans X
- Si $a, b \in X$, alors les conséquences immédiates de a et b sont dans X.

---

[3]*Le schéma d'axiomes de compréhension dit que tous les éléments d'un ensemble a satisfaisant une formule du premier ordre à une variable libre, avec paramètres si possible, forment un ensemble. Soit un énoncé A(x,x_1…x_k) sans paramètres et a au moins une variable libre x. On obtient :* $\forall x_1, \dots, x_k \forall x \exists z \forall y \dots (y \in z) \leftrightarrow (y \in a \text{ et } A\,(x, x_1, \dots, x_k))$
Il s'avère que cet énoncé découle du schéma de substitution appliqué à la relation $x = y$ *et* $A(xx_1, \dots, x_k)$
[4]*L'axiome de sélection peut être formulé comme suit :*
Si un prédicat R est défini pour tous les éléments d'un ensemble En*, il existe un sous – ensemble de* En *qui contient tous les éléments de* En *possédant la propriété R et ceux – là seulement.*
Suivant ce schéma, si la proposition a contient la variable libre x, on peut la considérer comme si elle applique un prédicat R à l'objet. On peut dire que le prédicat définit un certain ensemble.
Alors l'équivalence établie par ce schéma montre clairement l'existence de l'ensemble qui contient tous les objets auxquels s'applique le prédicat R (et ceux – là seulement).
L'axiome de sélection peut être formulé autrement :
$\forall x \forall y \forall z \dots \forall m \exists n \forall x[(x \in n)(x \in m)\exists(x, y, z \dots) + (x \notin n)((x \notin m) + \neg\exists(x, y, z \dots))]$
Cette formule n'est pas du premier ordre car le premier quantificateur $\forall E$ *pour sur les fonctions propositionnelles, ce qui revient à dire qu'une fonction propositionnelle arbitraire peut être substitué à ∃. Par sa formulation, l'axiome de sélection exige que toutes les fonctions propositionnelles particulières obtenues en mettant de manière successive absolument au lieu de ∃ toutes les fonctions propositionnelles disponibles, puissent être à la fois réalisées.*
Si l'on a par exemple une fonction ∃ (x, y)*, l'instance particulière correspondante de l'axiome de sélection sera :*
$\forall y \forall m \exists n \forall x \dots ((x \in n)(x \in m)\exists(x, y) + (x \notin n)(x \notin m) + \neg\exists(x, y))),$
qui est une proposition du premier ordre si ∃ est une fonction proposition du premier ordre. Cfr. Jean LARGEAULT, OpLogique mathémtique, Textes ,Paris :Armand Colin, 1972.
[5] *L'axiome d'extensionalité de ZERMELO sera plus tard remplacé par l'axiome d'extensionalité de FRAENKEL. Dans sa formulation actuelle, cet axiome qui est généralement attribué à FRAENKEL, apparaît pour la première fois dans SKOLEM (1926). On pense que deux ensembles sont égaux si et seulement si, ils ont les mêmes éléments. En théorie des ensembles, cet énoncé s'écrit comme suit :*

$$\forall x \forall y\big(\forall z(z \in x) \leftrightarrow (z \in y)\big) \rightarrow x = y.$$

3 HYPOTHÈSE POSÉE AU SFG

Nous supposons que SFG soit ω – cohérent. Cela signifie qu'un système formel est ω - consistant si et seulement si il ne contient aucune formule A(x) de telle manière que toutes les formules A(1), A(2),…, soient prouvables et la formule ¬(∀x) A(x) le soit également.

Donc, ce système ne contient aucune *expression du second type*[6] telle que, à la fois ;

1) Toutes les propositions

$y_1(x_1)$ sont prouvables dans SFG

2) La proposition

$\neg\forall x_1 y_1(x_1)$ est aussi prouvable dans SFG

Et il ne contient aucune *expression prédicative*[7] à un argument ax telle que, à la fois.

1) Toutes les propositions fermées du type

Ce qui revient à dire que toute les propositions obtenues en remplaçant dans ax, la variable x par un chiffre quelconque sont, prouvables dans SFG.

2) La proposition fermée[8]

$\neg\ ax_1$ est ainsi prouvable dans SFG

Puisque SFG est ω – cohérent, il est également cohérent [9]

Admettons que cohérence vaut existence, ce qui revient à la considérer valablement dans le monde algébrique, qui est un monde d'équations. Ce monde récessif est cher à HILBERT. La cohérence des systèmes fautifs, par exemple SFG + ¬Coh (SFG) pose de sérieux problèmes quand SFG est une théorie cohérente. Plus précisément, il s'agit de problèmes liés à l'observance de la loi et non pas de son esprit. Il résulte que la cohérence est une forme primaire de la rectitude formelle.

A cela s'ajoute la notion de Σ_n^{O-}(ou $\prod_{n-1}^0$)*fidélité*.

Cela signifie que tout théorème clos de la classe en question est vrai. D'où, il y a lieu d'affirmer ce qui suit :

i) La Π_1^0- fidélité est en effet la cohérence.

ii) La $\sum_1^0$ fidélité équivaut donc à la $\prod_{n+1}^0$ - fidélité, ce qui signifie en particulier que la 0-cohérence est effectivement la cohérence tout court. Il s'ensuit que la n+1-cohérence est strictement plus forte que la n-cohérence et cela s'est confirmé pour n = 0 et le résultat peut alors se généraliser.

Mais il est à remarquer que la 1- cohérence de SFG entraîne la cohérence de SFG et la réciproque est fausse[10].

[6] *Une expression fonctionnelle est une expression qui peut représenter une fonction, ici, l'expression du deuxième type comprend,* $y_1, y_2, y_3 \ldots$

[7] *Une expression prédicative est une expression qui peut servir à représenter un prédicat.*

[8] *Une proposition fermée est une proposition ne contenant pas de variables libres. Il y a des cas où une proposition quelconque peut devenir une proposition fermée quand on lié par des quantificateurs toutes les variables libres qui y sont contenues. Une proposition non fermée est dite ouverte. Signalons que la catégorie des propositions contient à la fois les propositions ouvertes et les propositions fermées.*

[9] *Il est à remarquer que la condition* $\omega - cohérent$ *est moins générale que la condition être cohérent.*

[10] *A. MIQUEL, dans son article « les théorèmes d'incomplétude de GÖDEL » a construit artificiellement des théories cohérentes et même récursives qui ne satisfont pas la propreté 1-cohérence.*

4 RÈGLES DE PROUVABILITÉ DE SFG

1. Règle de la conséquence

A

A →B .

•

• •B

Si A et (A→ B) sont des assomptions, il y a lieu de dériver B

2. Règle pour le quantificateur universel : $\forall x$

A .

•

• •∀A

Suivant ce schéma, si A est une assomption contenant la variable x[11], il y a lieu de dériver la proposition ∀A

3. Règle pour le quantificateur existentiel ∃x

$$\frac{A \to B}{\exists(x)(A \to B)}$$

Ce schéma nous enseigne que si A est une assomption contenant la variable x et que ce schéma ne peut être appliqué que si la proposition ne contient pas x et si cette variable n'est pas liée dans A.

Ces trois règles définissent la relation de *conséquence immédiate* dans SFG.

5 REPRÉSENTATION DES PROPRIÉTÉS MÉTATHÉORIQUES DANS SFG

Partant de l'arithmétisation, GÖDEL traduit au moyen de l'arithmétique récursive un certain nombre d'énoncés métathéoriques.

Pour établir l'existence des propositions indécidables dans SFG, il y a lieu de montrer qu'il est possible de représenter dans SFG certaines propriétés métathéoriques.

A cet effet, GÖDEL se sert de la théorie des fonctions récursives et il montre :

1) d'une part que les propriétés et opérations métathéoriques employées sont *récursivement représentables*.

2) d'autre part que tout prédicat récursif est *représentable* dans SFG.

6 LES FONCTIONS RÉCURSIVES ET REPRÉSENTATION

Le terme de récursivité désigne le concept mathématique précis qui correspond à l'idée intuitive d'effectivité ou de calculabilité. Pour GÖDEL, cette notion est la formalisation à donner à l'exigence d'effectivité dans l'arithmétique

[11] *Pour marquer cette distinction, RUSSELL et WHITEHEAD actualisent de nouveau la distinction établie par PEANO entre variable réelle et variable apparente. Ainsi, est dite variable réelle, toute variable déterminant la valeur de la fonction. Cela concerne toutes les variables qui figurent dans des fonctions qui ne sont pas quantifiées. Mais, dans le cas où elle est liée par la quantification universelle, la variable devient apparente, puisqu'en ce moment elle ne caractérise plus la valeur de la fonction, l'assertion n'étant plus fonction de x, mais elle est fonction de la fonction elle-même, c'est-à-dire elle est donc universellement quantifiée, et la variable perd son pouvoir discriminant. Pourtant, il convient de préciser que ce caractère apparent de la variable tombe sous la portée d'une quantification indiquant totalement la maîtrise ayant trait à l'ambigüité de la variable. En effet ce caractère de généralité n'est pas modifié par l'idée de quantification existentielle. La raison est que le choix « d'au moins une » s'étend aussi sur le domaine complet des valeurs à telle enseigne qu'il faut souligner que* $(\exists x)$ $(\emptyset x)$ *soit une proposition générale, dans laquelle la variable n'est qu'apparente.*

contextuelle. Donc, les constructions métathéoriques doivent être récursives. Alors que le concept de fonction récursive formalise la notion d'effectivité, celui d'ensemble récursivement énumérable formalise une autre notion : celle d'ensemble engendré par un procédé systématique à partir des données initiales [1].

6.1 DÉFINITIONS

On dira qu'une fonction arithmétique $\emptyset(x_1, \dots, x_n)$ est récursivement définie en fonction des fonctions $\mu(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ et $\psi(x_1, \dots, x_{n+1}), si$ $\forall(k, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$:

$$\emptyset(0, x_2, \dots, x_n) = \mu(x_2, \dots, x_n)$$

$$\emptyset(k_{+1}, x_2, \dots, x_n) = \psi(k, \emptyset(k, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n).$$

Une fonction arithmétique est récursive s'il existe une suite finie des fonctions arithmétiques vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $(x_1, \dots x_n) = \emptyset$

(2) $\forall i: \emptyset_i$ est

a) Une fonction constante ou

b) Une fonction successeur

c) Une fonction récursivement définie en fonction de deux fonctions arithmétiques précédentes ou

d) Une fonction obtenue d'une fonction précédente par substitution d'une des fonctions à une variable de l'autre fonction.

Il est à noter que le degré d'une fonction récursive $\emptyset(x_1, \dots x_n)$ est la taille minimale d'une telle suite. Il est une sorte de fonction caractéristique de la relation récursive.

Un prédicat $R(x_1, \dots x_n,)$est dit récursif, s'il existe une fonction récursive$\emptyset(x_1, \dots x_n)$ telle que $R(x_1, \dots, x_n,) \Leftrightarrow \emptyset(x_1, \dots, x_n) = 0$

7 THÉORÈMES PRÉPARATOIRES

On établit les fonctions et les prédicats récursifs par l'application de quelques procédés et définitions moyennant les opérateurs logiques les quantificateurs et la fonction minimum [6].

I. Toute fonction (ou prédicat) obtenue, à partir d'une fonction (ou prédicat) récursive, par substitution d'une variable ou par une fonction récursive, est récursive.

Illustrons cela par des exemples :

1. $(x_1, x_2) \longrightarrow (x_1 \wedge x_2)$
2. $(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x_1, x_2)$
3. $(x_1, x_2, x_3, x_4) \longrightarrow (x_3, x_2) + x_1 \wedge (x_3 + 2) + 7$

II. Si R et S sont des prédicats récursifs, alors $\neg$ R et $(R \vee S)$ sont des prédicats récursifs. Il en résulte que si $\psi_1 et$ ψ_2 sont des fonctions récursives, la fonction suivante l'est également :

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \psi_1(x_1, \dots, x_n) \; si \; R$$
$$\psi_2(x_2, \dots, x_n) \; sinon$$

Preuve

Première partie

Soit c_k représentant toutes les fonctions constantes égales à k, pour tout nombre des variables et soient α, β les indicatrices respectives des ensembles ci-dessous :

$$\{0\}, \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$$

On dit que les indicatrices α et β sont récursives. Cela signifie donc que :

1. $\alpha(0) = C_1(\,)$
2. $\alpha(k+1) = C_0(k)$
3. $\beta(0, x) = C_0(x)$
4. $\beta(k+1, x) = \alpha(x)$

D'où, on déduit les prédicats $\neg R$ et $R \vee S$ à partir des prédicats R, S et des fonctions Ψ_1 et Ψ_2.

Deuxième partie

La fonction recherchée est égale à $(\alpha \circ \Psi) \wedge \Psi_1 + (\alpha \circ \alpha \circ \Psi) \wedge \Psi_2$ où Ψ est une fonction arithmétique telle que :

$R(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \Psi(x_1, \dots, x_n) = 0$ et cela pour tout entier naturel.

III. Si les fonctions $\emptyset(x) et\ \psi_1(y)$ sont récursives alors le prédicat $\emptyset(x) = \psi_1(y)$ est récursif.

Preuve

Soit γ la fonction indicatrice de $\{(x, y)/x \neq y\}$.

1. D'abord, on construit une fonction $x \longrightarrow x - 1$ appelée x_{-1} telle que

$$x_{-1}(0) = 0$$
$$x_{-1}(k+1) = k$$

Autrement dit, on a :

$x_{-1}(0) = C_0(\,)$ et

$x_{-1}(k+1) = Id(k)$

2. Ensuite, on établit que

$\gamma(0, x) = \alpha(\alpha(x))$, sachant que ($\alpha \circ \alpha$ est la fonction indicatrice de $\mathbb{R}^*$).

$\gamma(k+1, x) = C_1(x)$, si $Id(x) = 0$

$= \gamma(k, x_1(x))$ sinon

3. Finalement, on exhibe en effet que

$$\phi(x) = \Psi_1(y) \leftrightarrow \gamma(x, y) = 0$$

IV. Si la fonction $\emptyset(x)$ ef le prédicat $R(y)$ sont récursifs alors les prédicat S, T et la fonction $\psi(x, y)$ ci-dessous définis le sont aussi :

a) $S(X, Y) \leftrightarrow \exists x(x \leq \emptyset(x) \wedge R(x, Y))$,

b) $T(X, Y) \leftrightarrow \forall x(x \leq \emptyset(x) \longrightarrow R(x, Y))$,

c) $\psi(X, Y) \leftrightarrow \mathcal{E}x(x \leq \emptyset(x) \longrightarrow R(x, Y))$,

où $\varepsilon_x F_x$[12] est considéré comme le plus petit nombre x tel que $F(x)$ et 0 le cas échéant lorsque la variable *x* est bornée, l'opération ε est seulement récursive primitive.

Preuve

Considérons la fonction θ telle que

$\theta(0, y) = C_0(y)$

[12] Le domaine des fonctions définissables ou moyen de l'opérateur Min recouvre le domaine des fonctions récursives générales. Pour définir la récursivité générale KLEKNE s'est servi de l'opérateur Min correspondant à la notion intuitive de plus petit nombre qui réalise une propriété.

$\theta(k+1, y) = \theta(k, y)$ si $\neg R(k+1, y)$ où $\theta(k, y) \neq 0$

$= k$ sinon

Il nous faut préciser que ϕ vaut en effet 0 jusqu'au premierk_0, quand on sait bien qu'elle est fonction de k et, puis elle vaut k_0 après. En clair, cette fonction est récursive d'après le théorème préparatoire II. Il faut seulement considérer dans le cas d'espèce Ψ et S. Nous aurons en effet

$$\Psi(x, y) = \theta(\phi(x), y)$$

$$S(x, y) = R(\Psi(x, y), y)$$

Il en résulte que le prédicat T est obtenu suivant les mêmes procédés que le prédicat S, à la seule différence de prendre $\neg R$ en lieu et place de R.

Il est à souligner que ces théorèmes préparatoires au théorème de GÖDEL permettent de démontrer que les fonctions $x + y, x \wedge y\ et\ x^y$ et les prédicats $x < y\ et\ x = y$ sont récursifs.

Mentionnons en effet que la notion de représentabilité permet de lier le concept de récursivité au SFG.

7.1 L'UTILISATION MÉTATHÉORIQUE DES FONCTIONS RÉCURSIVES

La théorie des fonctions récursives est un outil technique grâce auquel on peut exprimer, sous forme arithmétique, certains raisonnements métathéoriques. Ici on énonce les règles d'un système formel sous forme récurrente. Ainsi, les propriétés métathéoriques sont établies de proche en proche, en commençant par des cas élémentaires pour aboutir aux cas généraux, en cela qu'il s'agisse des propriétés relatives à certaines catégories d'expressions ou qu'il s'agisse de propriétés relatives à certains types de preuve (raisonnements par induction structurelle).

Donc les fonctions récursives sont les bien indiqués pour exprimer les propriétés métathéoriques et rendre parfaitement compte des fonctions et des prédicats récursifs [6].

Il faut alors établir, dans ce cas, une correspondance entre les éléments du système formel étudié et les entiers. Pour ce faire, la méthode de l'arithmétisation réalise donc une telle correspondance.

Notons qu'une opération, applicable à une certaine catégorie d'objets, est dite *représentable récursivement*, si l'on peut établir une correspondance biunivoque entre ces objets et une certaine classe d'entiers ou toute la suite des entiers, et trouver une fonction récursive F telle que, lorsqu'on applique cette opération et cette fonction à des éléments correspondants, on trouve des éléments correspondants.

Notons alors que la fonction F est *une représentation récursive* de cette opération ou qu'elle la *représente récursivement*.

Notons qu'une propriété, applicable à une certaine catégorie d'objets, est dite *représentable récursivement,* si l'on peut établir une correspondance biunivoque entre ces objets et une certaine classe d'entiers ou toute la suite des entiers et trouver un prédicat récursif R tel que, lorsque cette propriété est vérifiée de certains objets, le prédicat R est vérifié des entiers correspondants.

Notons alors que le prédicat R est donc une *représentation récursive* de cette propriété ou qu'il la *représente récursivement [6]*.

8 THEOREME

Tout prédicat récursif est représentable dans SFG. La preuve de ce théorème intègre la fonction β(x, y, i), une fonction récursive primitive $\beta: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ définie pour tout $(x, y, i) \in \mathbb{N}^3$ par β(x, y, i) = x mod((i+)y+1) où x modq désigne le reste de la division euclidienne de x par q (avec q>0) et ayant la caractéristique suivante : pour toute suite finie $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers x et y tels que β(x, y, i) = ai pour i allant de 1 à n.

8.1 ENONCÉS TECHNIQUES DE L'INCOMPLÉTUDE [7]

- **L'expansivité et la récessivité**

Une propriété des entiers est dite *expansive,* quand elle peut s'écrire $\exists x_1 \ldots \exists x_k$ $A[x_1,\ldots,x_k]$, où A est un énoncé d'arithmétique qui utilise des quantificateurs bornés $\forall x<p$, $\exists x<p$; ces énoncés sont donc $\sum_1^0$. La classe duale (propriétés *récessives*, énoncés Π_0^1), est formée des énoncés $\forall x_1 \ldots \forall x_k A[x_1,\ldots,x_k]$, où A est à quantificateurs bornés.

Notons qu'une propriété expansive est donc « approximable » par des essais systématiques. En clair, cela veut dire que plus on essaye, plus on a de chances de la vérifier, elle réfère à un type particulier de potentialité. A l'opposé, signalons que la récessivité est le « jusqu'ici ça va ». Elle est donc une propriété qui s'amenuise avec les essais.

La preuve est expansive. Cela signifie donc que plus on fait d'essais, plus on a de théorème, alors que la cohérence est récessive, plus on a de chances de trouver une contradiction. Remarquer que « l'incomplétude dit au fond que récessif et expansif ne coïncident pas et ne peuvent coïncider, à aucun prix ».

En informatique, une propriété qui est exprimée à l'aide de quantificateurs bornés est algorithmiquement décidable. Ici, il existe un algorithme pour dire si $A[x_1,\ldots,x_k]$ est vraie ou fausse pour chaque choix de valeurs des parenthèses $x_1, \ldots, x_k$. Donc, la vérification d'une quantification bornée $\forall x<pA[x]$, se pose en effectuant un nombre fini de vérification pour les valeurs x=0, p - 1.

Si SFG est un système « raisonnable » d'arithmétique, alors $A[n_1, \ldots, n_k]$ est décidable dans SFG. Cela signifie que pour chaque valeur $n_1, \ldots, n_k$ des paramètres $x_1,\ldots, x_k$, l'énoncé ou sa négation est prouvable parce qu'un système d'arithmétique raisonnable est censé contenir ce qu' il reflète en terme des calculs formels.

Dans un langage fondé sur 0, 1, +, x, =, < quelques axiomes remplissent cette tâche. Peu importe la liste, on s'intéresserait à un système qui ne contient pas ce minimum vital. La décision dans SFG se fait dans le même sens que la décision algorithmique, car la décision dans SFG recopie pas à pas et de manière formelle, les étapes de l'algorithme.

On pourrait dire : si SFG est contradictoire, alors il « en fait trop », car il prouve à la fois A et sa négation.

Une propriété expansive $\exists n_1 \ldots \exists n_k A[n_1,\ldots,n_k]$ est algorithmiquement semi-décidable ; ce qui signifie qu'il existe une semi-algorithme (algorithme qui ne donne pas toujours de réponse) rendant la réponse « oui » quand l'énoncé est vrai, et ne répond à rien sinon.

Ce semi-algorithme est facile à trouver quand on énumère les valeurs $n_1, \ldots, n_k$, ainsi pour k=2, on a : (0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,0), (0,3), (1,2), (2,1), (3,0), (0,4), …, on tente successivement à réaliser toutes les possibilités.

On finira parfaitement par tomber sur le bon choix, s'il existe alors l'algorithme pour A va permettre de conclure.

Admettons que la propriété soit fausse, l'algorithme ne va rendre au retour aucune réponse. Ainsi, il est « semi » partiel. Cela vaut également pour la prouvabilité, s'il y a un choix de valeurs $n_1, \ldots, n_k$ qui valident A, alors A est prouvable dans SFG pour ce choix et la règle logique du quantificateur existentiel fait passer de $A[n_1,\ldots, n_k]$ à$\exists x_1 \ldots \exists x_k$ $A[x_1,\ldots,x_k]$.

Avec un système formel, le langage demeure d'en faire trop. Supposons que SFG soit contradictoire, il existe une possibilité plus tordue qui dit que SFG peut être cohérente et prouver alors des énoncés expansifs faux, c'est-à-dire SFG+¬Coh(SFG), qui est cohérente, si SFG l'est ; là on a affaire au deuxième théorème d'incomplétude et cela prouve un énoncé expansif faux ; donc la contradiction de SFG.

Quant au dual, les propriétés récessives ne sont pas visiblement algorithmiques, même « semi ». De façon raisonnable, un énoncé récessif vrai est prouvable. En clair, le théorème d'incomplétude donne à cet effet un contre-exemple : l'énoncé de GÖDEL, récessif et vrai, n'est pas prouvable.

Retenons présentement qu'un énoncé récessif prouvable dans SFG est forcément vrai, si SFG est cohérente. Notons que s'il est faux, sa négation, énoncé expansif et vrai, serait prouvable dans SFG et SFG serait donc contradictoire.

- **De la classification des prédicats**

1. Les prédicats du premier ordre

Pour $n \geq 1$, les énoncés $\sum_n^0(\prod_n^0.)$ sont des énoncés ayant une alternance n et commençant par un groupe existentiel (universel).

Un énoncé d'alternance n peut être perçu au choix comme $\prod_n^0$ $ou \prod_m^0$, pour $m > n$. En particulier, un énoncé à quantificateurs bornés est à la fois $\sum_1^0$ et $\prod_1^0$. Cela signifie qu'il est expansif et récessif.

Ainsi apparait une troisième hiérarchie, celle des Δ_n^0 qui traduit des ensembles admettant les deux formes, $\sum_1^0$ et $\prod_1^0$, Si les ensembles Δ_n^0 sont des ensembles récursifs ou décidables par un algorithme, alors les $\sum_1^0$ $sont$ dits les ensembles semi – récursifs. Ils peuvent être identifiés par un semi – algorithme ou encore un ensemble récursivement énumérable $(r.e)$ dans ce cas.

En effet, un ensemble semi-récursif non vide se présente comme l'image d'une fonction récursive ou calculable. Mais il est à remarquer que la hiérarchie des Δ_n^0 n'est pas une hiérarchie formelle[13]. Car elle suppose deux écritures équivalentes.

Il est essentiel de retenir que par codage, chaque classe $\sum_n^0(\prod_n^0)$ a un élément universel ou complet. Pour $n = 1$ par exemple, la démontrabilité formelle dans un système cohérent d'arithmétique, est complète, c'est-à-dire tout ensemble $\sum_n^0$, peut être factorisé à travers la démontrabilité. Ce qui implique de définir cet ensemble comme suit : $A[n]$ est vrai si $A[\overline{n}]$ est prouvable, du moins le système est $1 - cohérent$; s'il est seulement cohérent, il faut prendre la variation à la ROSSER.

Par la diagonalisation, chaque classe est distincte de sa duale. Il en résulte que si $f(m,n)(m \in Fn)$ est une énumération $\sum_1^0$, des ensembles $\sum_1^0$, alors l'ensemble

$\prod_1^0\{n; n \notin Fn\}$ n'est pas $\sum_1^0$. D'où le théorème de **TURING** ou le premier théorème d'incomplétude, si la prouvabilité est utilisée comme un élément universel.

2. Les prédicats du second ordre

En admettant des quantificateurs sur les prédicats, la logique est formulée au second ordre.

Quelques précisions s'imposent donc :

Nous avons deux types de hiérarchie

1. *La hiérarchie projective*, cela signifie donc que les quantificateurs au premier ordre sont utilisés par des nombres naturels, tandis qu'au second ordre, ils sont utilisés sur les ensembles d'entiers naturels. On classifie le résultat en $\sum_n^1$ et $\prod_n^1(n \geq 1)$, où n est le nombre d'alternances de quantificateurs du second ordre. En effet, la classe Δ_1^1 valant $\sum_1^1 \cap \sum_1^1$, ou ensembles perarithmétiques, est déjà strictement plus grande que tous les $\sum_n^0$ et $\prod_n^0$, Noter qu'un ensemble dit hyperathmétique non arithmétique typique comprend les nombres de GÖDEL d'énoncés arithmétiques vrais.
2. *La hiérarchie logique*, cela veut dire que les quantificateurs du premier ordre ne sont pas numériques. Notons que faute de mieux $\Sigma^n, \prod^n$, sont les alternances au second ordre. La hiérarchie logique apparait plus fine que la précédente qui est décalée d'une case.

Elle répond à la métamathématique, alors que la précédente est plutôt ensembliste.

Les deux hiérarchies sont mieux comprises à travers la définition de DEDEKIND des entiers naturels qui dit que : « le plus petit ensemble contenant 0 est clos par rapport au successeur S ». La relation est traduite par un quantificateur sur un prédicat unaire X, à savoir :

$$x \in N : \leftrightarrow \forall x\big((x(0) \wedge \forall y(x(y) \longrightarrow X(Sy))\big) \longrightarrow X(x)$$

Un énoncé $\Sigma_1^0 ou$ $\exists n$ $A[n]$utilisant une quantification numérique $\exists n$ est exprimé au second ordre en $\exists x$ $(x \in N \wedge A[x])$, et donc il est $\prod^1$. De manière analogue, les énoncés récessifs sont Σ^1. En général, un énoncé $\prod_n^1$ est écrit sous $\prod^{n+1}$.

[13]*Cette équivalence peut être immédiate (cas d'une implication entre deux $\sum_1^0$, admettant deux formes prénexes, ∀∃ et ∃∀, ce qui la rend immédiatement Δ_2^0) ou non prouvable (cas d'un ensemble a priori semi – récursifs, donc le caractère récursif, Δ_1^0, dépend d'une preuve de décidabilité).*

8.2 LES TECHNIQUES DE L'INCOMPLÉTUDE [7]

Le point fixe : RUSELL

L'antinomie de RUSSELL est la version du théorème de CANTOR appliquée à « l'ensemble de tous les ensembles » et qui engendre une antinomie : si a : = $\{x; x \notin x\}$, alors y ∈ a ↔ y ∉y, donc a ∈ a ↔ a ∉ a. Dans les systèmes « normaux », à déduction non artificiellement bridée, cela conduit à la contradiction.

Remarquer que le point fixe logique ou l'incohérence est le même que le point fixe du λ- calcul. En ce sens, le point fixe logique évite la contradiction par une boucle infinie des calculs.

Cette déduction naturelle de PRAWITZ admet une notion de normalisation, mais celle-ci ne converge pas. Au fond, le processus de normalisation de l'autonomie de RUSSELL, c'est le point fixe du λ- calcul.

D'où on établit la relation :

Incohérence ∼non terminaison

Les logiques « normales » sont pour l'essentiel le temps de normalisation. Du point de vue d'un système formel, il n'y a pas de différence entre un algorithme dont on ne peut pas prouver la terminaison et une boucle du genre de celle induite par l'autonomie de RUSELL.

L'autonomie de RUSSELL se décompose en deux parties, a ∈ aVa ∈ a et a ∉a Va ∉aElle est contradictoire que *modulo* on applique la règle de contraction, c'est-à-dire le remplacement d'une disjonction A v A par A.

Finalement, pour ce qui regarde le méta, rien ne distingue un système d'un méta-système. Dans la diagonalisation, la fonction de deux arguments f(x,y) est essentiellement du type f(x) où l'indice indique une position « méta » par rapport à x.

Le point fixe : GÖDEL

Le codage de la syntaxe indique des fonctions récursives et propriétés expansives du genre Sub (m,n) tel que Sub $(\lceil A\rceil, \lceil q\rceil) = \lceil A_{[\bar{q}]}\rceil$ représentant au niveau des codes ce qui résulte de la substitution du terme qui code l'entier q, dans l'énoncé A. Rigoureusement, on devrait préciser la variable pour laquelle doit être effectuée la substitution, prenons, y_o.

Ainsi, on va introduire Dem (m,n), tel que Dem $(\lceil A\rceil, \lceil D\rceil)$ si D est une preuve de A, , etc. enfin Coh ($_{SFG}$), la Cohérence de SFG (propriété récessive) s'exprime comme $\forall x \neg$ Dem $(\overline{\lceil 0 \ \neq 0\rceil}, x)$.

En vue d'obtenir l'énoncé de GÖDEL, il faut constituer $\forall x \neg$ Dem (Sub (y_o, y_o), x), c'est-à-dire un énoncé A$[yo]$, et pour G : = A$[\lceil TA\rceil]$, donc G exprime sa non-prouvabilité.

L'argument diagonal

La construction de l'énoncé de GÖDEL repose sur un argument diagonal. On construit tout d'abord la formule à une variable libre Δ(x) :

$$\Delta(\mathrm{x}) \equiv \forall \mathrm{z}[\mathrm{z} = \mathrm{sub}(\mathrm{x}, \mathrm{x}) \Rightarrow \neg \mathrm{DemT}(\mathrm{z})]$$

Ce qui veut dire que la formule de code x, appliquée à son propre code, n'est pas prouvable dans SFG, et si l'on applique cette formule à l'entier $\lceil \Delta \rceil$, alors on a G=Δ(⌜Δ⌝), une formule qui dit d'elle-même qu'elle n'est pas prouvable dans SFG.

L'argument diagonalconsiste à partir de fonctions g(z) et f(x,y), à former h(x) : = g(f(x,x)). Si h prend la forme h(x) = f(x,a), alors on a h(a)=f(a,a)=g(f(a,a)). Donc h(a) est un point fixe de g, ce qui est vrai.

Notons que la formule f(m,n) étant le code de An$[\overline{m}]$ et g étant la non-prouvabilité, alors le point fixe est un énoncé disant : « je ne suis pas prouvable ». Il est à remarquer que le premier théorème d'incomplétude montre que g(.) n'est pas calculable ou récursif.

Ainsi, il convient de souligner que l'antinomie de RICHARD sous-tend, à certains égards, le théorème de GÖDEL : « le plus petit entier non définissable en moins de 100 symboles », qui est défini a nettement moins de 100 symboles. Pour sortir de l'antinomie de RICHARD, on dit que le mot « définir » n'est pas bien défini. A cet effet, on doit préciser le langage. Donc, le théorème de GÖDEL peut être perçu comme une version « corrigée » de RICHARD. GÖDEL fait donc référence expressément au paradoxe de RICHARD.

Supposons que SFG soit récursivement axiomatisable, SFG prouve toutes les formules Σ_0 vraies dans N, donc toutes les formules Σ_1 vraies dans N, et qu'elle est Σ – cohérente.

- G = (⌜Δ⌝) est une formule close, équivalente à la négation d'une formule Σ_1;
- Si G était prouvable, G étant Σ_1 ne pourrait être vraie, car alors elle serait prouvable, et cela contredirait la cohérence de SFG. la formule G serait donc vraie dans ℕ, ce qui voudrait dire, par construction de G, que la formule G ne serait pas prouvable, c'est une contradiction. Donc G n'est pas prouvable.
- Si G était prouvable dans SFG, par Σ – cohérence, elle serait vraie, or elle est fausse d'après ce qui précède. Donc, G n'est pas prouvable.

Il faut donc retenir que le véritable contenu du théorème est dans la non-prouvabilité de G.

Le premier théorème d'incomplétude de GÖDEL s'énonce comme suit :

Si SFG est une théorie récursivement axiomatisable, cohérente, et qui prouve toutes les formules Σ_0 vraies dans ℕ, alors il existe une formule G, négation d'une formule Σ_1, qui est vraie dans ℕ, mais non prouvable dans SFG.

Il est à remarquer que la formule G en question est équivalente à une formule universelle $\forall$x H(x), où H est Σ_0. Cette formule était vraie, pour chaque entier n (représenté par s… s0). H(n) est vraie, donc prouvable étant Σ_0. On a ainsi distingué : « vérité et prouvabilité », un énoncé » universel $\forall$x H(x), qui n'est pas prouvable dans SFG alors que pour chaque entier n, H(n) est prouvable dans SFG.

- **Une preuve partielle du premier théorème d'incomplétude**

La preuve par GÖDEL, de son premier théorème d'incomplétude, utilise essentiellement deux ingrédients : l'énoncé de GÖDEL est équivalent, via codage, à un énoncé affirmant sa propre non prouvabilité dans une théorie cohérente considérée et l'argument diagonal.

Mais l'énoncé de GÖDEL n'est pas paradoxal. Il est vrai dans N, car s'il était faux, il serait prouvable. Or cet énoncé est de complexité logique suffisamment simple pour que sa prouvabilité, dans une théorie capable de coder l'arithmétique, entraîne sa vérité dans ℕ. Donc il est vrai dans ℕ, ainsi, il n'est pas prouvable, par définition de l'énoncé.

La négation de l'énoncé de GÖDEL n'étant non plus prouvable, il faut pour cela une hypothèse de cohérence plus forte, à la gôdelienne. ROSSER a utilisé une astuce pour modifier l'énoncé aux fins de la cohérence.

La preuve de GÖDEL repose sur l'argument suivant : l'énoncé étant vrai, sa négation est fausse.

Supposons que N est modèle de la théorie, cela suffirait pour que la théorie ne soit pas prouvable. Mais GÖDEL a construit un énoncé d'une complexité logique suffisamment faible pour qu'une hypothèse de cohérence beaucoup moins forte suffise. Donc, de tels énoncés faux ne peuvent être prouvables, et cela peut s'exprimer syntaxiquement.

« Les théorèmes de limitation, écrit-LADRIERE, montrent précisément que la formalisation de la métalangue d'un système à l'intérieur de ce système n'est que très partiellement réalisable » [6].

La preuve des théorèmes de GÖDEL repose sur le théorème du sens que nous examinons dans les lignes qui suivent.

9 THÉORÈME DU SENS (OU LEMME DE GÖDEL)

Tous les prédicats et toutes les fonctions, sauf le prédicat Dem, sont représentables dans SFG.

A tout prédicat récursif R(k_1, k_2, …, k_n) à n variables des nombres naturels, il existe n arguments dans SFG dont le nombre de GÖDEL est r ayant les variables libres (u_1, u_2, …, u_n) telle que, pour n- tuplet k_1, k_2, …, k_n de nombres naturels, on ait les énoncés suivants :

$$Rk_1k_2 \dots k_n \rightarrow Dem\ [Subr\ Ngd\ (u_1)\ Ngd\ (u_2) \dots Ngd\ (u_n)\ Ngd\ (Nk_1)\ Ngd\ (Nk_2) \dots Ngd\ (Nk_n)]$$

et

$$\neg Rk_1k_2 \dots k_n \rightarrow Dem[Neg\ Sub\ r\ Ngd(u_1)\ Ngd(u_2) \dots Ngd\ (u_n)Ngd(Nk_1)Ngd(Nk_2) \dots Ngd\ (Nk_n)]$$

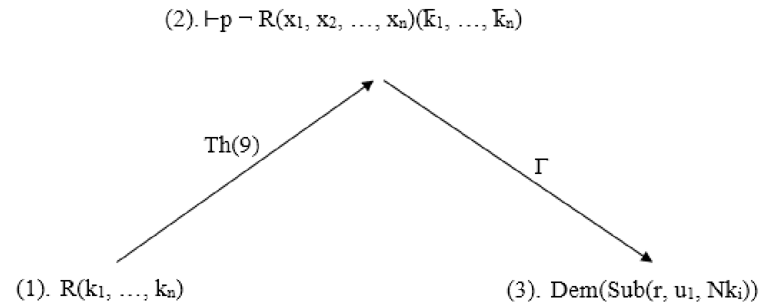
En d'autres termes, on a :

(i). $R(k_1, k_2, \dots, k_n) \rightarrow Dem(Sub(r, u_i, N(k_1)))$

(ii). $\neg R(k_1, k_2, \dots; k_n) \rightarrow Dem(Neg(Sub(r, u_i, N(k_1))))$

où $\mathrm{Sub}(r, u_i, N(k_1))$ est le résultat de la substitution des variables u_1, u_2, …, u_n par les nombres $N(k_1)$, $N(k_2)$, …, $N(k_n)$ respectivement.

Notons que le théorème du sens affirme clairement que tous les prédicats récursifs sont exprimables dans le système SFG, par des arguments et directement de l'application du théorème V et de la traduction par Γ, tel que cela est illustré par le schéma suivant :



(1).R(k_1, …, k_n) est un prédicat récursif (vrai de k_1, k_2, …, k_n) ;

(2).¬R(k_1, …, k_n)(u_1, …, u_n) est sa représentation dans SFG ;

(3).Dem(Sub(r, u_1, N(k_i))) est l'arithmétisation par Γ de l'énoncé métathéorique

$\vdash_p \neg R(x_1, \ldots x_n)(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_2)$ où $r = \Gamma(\neg R(k_1, \ldots, k_n)(u_1, \ldots, u_n)$

Les deux énoncés figurant dans le lemme de GÖDEL n'appartiennent pas au SFG. Ce sont donc des énoncés métathéoriques formulés à partir de l'arithmétique récursive.

Soit $A(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ l'expression prédicative associée au prédicat R.

Et soit $A\big(N(k_1), N(k_2), \ldots, N(k_n)\big)$ la proposition fermée obtenue en remplaçant dans l'expression prédicative qui précède les variables $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ par les chiffres $N(k_1), N(k_2), \ldots, N(k_n)$ représentant dans SFG les entiers $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

On affirme dans ce lemme ce qui suit :

Si le prédicat R est vérifié dans des nombres entiers $k_1, k_2, \ldots, k_n$, la proposition fermée $A\big(N(k_1), N(k_2), \ldots, N(k_n)\big)$ est prouvable dans SFG.En d'autres termes,

Si l'énoncé $R(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ est vrai (dans l'arithmétique intuitive) la proposition représentant cet énoncé dans SFG, est démontrable dans SFG.

Si cet énoncé est faux, la proposition qui la représente dans SFG est indémontrable dans SFG.

Preuve

Démontrons ce lemme pour tous les prédicats R ayant la forme $\mu_0 = \emptyset(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ avec ∅ récursive. Ce lemme vaut pour tous les prédicats récursifs Q.

En effet, Q étant récursif et ψ la fonction récursive associée, on a :

$$Q(\mu_1, \ldots, \mu_n) \leftrightarrow R(0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$$

où le prédicat R est défini par

$$R(\mu_0, \ldots, \mu_n) \leftrightarrow \mu_0 = \emptyset R(\mu_1, \ldots, \mu_n).$$

Et le lemme de GÖDEL étant vrai pour le prédicat R, il existe r vérifiant les deux énoncés figurant dans le lemme de GÖDEL; et $Sub\ (r_0, \mu_1)$est donc convenable et d'après le schéma de substitution, il vérifie ces deux énoncés pour le prédicat Q.

Supposons le prédicat R tel que défini par $\mu_0 = \emptyset(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ avec ∅ récursive. Prouvons le Lemme par récurrence sur le degré de ∅.

Si ∅ est de degré 1, alors l'un des deux prédicats àn arguments suivants peut convenir :

$$(\mu_0 = f^n 0) \wedge (\mu_1 = \mu_1) \ldots (\mu_n = \mu_n)$$

$$(\mu_0 = f\mu_1) \wedge (\mu_2 = \mu_2) \dots (\mu_n = \mu_n)$$

Si $\emptyset$ est de degré $m > 1$, alors on a de deux prédicats récursifs $u\ et\ \psi$ de degrés inférieurs par substitution ou définition récursive.

1er Cas : $\emptyset = \psi(u(y_1, \dots, y_{n1}), \dots, u_{n2})$

Soit r un prédicat à n_1 arguments associés donc à $u_0 = \psi(u_1, u_2, \dots, u_n)$ par hypothèse d'induction.

Et soit s un prédicat à n_2 arguments associés à $y_0 = u(y_{n1}, \dots, y_{n2})$ par hypothèse d'induction.

Nous présentons un prédicat ayant $(n_1 + n_2)$ arguments associés à $\mu_0 = \psi(\mu(y_1, \dots, y_{n1}), \dots, u_{n2})$. Donc, on a l'expression prédicative suivante :

$\forall_x \left(Sub(s(x, y_0)) \rightarrow Sub\ r\ (x, x_1) \right)$

D'où les deux énoncés du Lemme sont vérifiés pour le prédicat R, étant donné qu'il signifie que $\emptyset = \mu_0$.

2ème Cas

La définition récursive montre que

$$\emptyset(0, u_2, \dots, u_n) = \mu(u_2, \dots, u_n)$$

$$\emptyset(k+1, u_2, \dots, u_n) = \psi(k, \emptyset\ (k, u_2, \dots, u_n), u_2, \dots, u_n)$$

Soit r un prédicat à $n+1$ arguments associés à $\mu_1 = \psi(k, l, u_2, \dots, u_n)$ par hypothèse d'induction.

Et soit s un prédicat à n_2 arguments associés à $\mu_1 = \mu(u_2, \dots, u_n)$ par hypothèse d'induction.

Nous présentons un prédicat ayant n arguments correspondant à $\mu_0 = \psi(k, u_2, \dots u_n)$.

Donc, on a l'expression prédicative suivante :

$$(\exists A)(\exists k)\big(A(k_0, u_0) \wedge \left[\forall_u \equiv Sub\ s(u, u_1)) \vee \exists(y, z)\big(A(y, z) \wedge x = Sub\ r(y, z, k, l)\big)\right]\big)$$

D'où les deux énoncés du Lemme sont vérifiés pour le prédicat R.

Ce lemme est la clef des théorèmes d'incomplétude.

D'après GÖDEL, ce théorème (du sens) bien sûr est une conséquence du fait que dans le cas d'un prédicat récursif R, on peut décider pour tout n-uple des entiers, et sur la base des axiomes du système P, si le prédicat R vaut ou non.

Partant du lemme de GÖDEL, on établit que tout prédicat récursif est représentable dans SFG. De même, on peut affirmer que toute fonction récursive est représentable dans SFG. Il ya lieu de faire correspondre à toute fonction ψ à n arguments, un prédicat R à $(n+1)$ arguments. Et si la fonction ψ est récursive alors le prédicat R l'est aussi.

Remarquer que l'expression du théorème du sens affirme que le système SFG décrit correctement les nombres naturels connus. La compréhension de cet énoncé est donc le pivot central de la preuve du théorème de GÖDEL.

En effet, la preuve du lemme de GÖDEL (ou théorème du sens) repose sur les procédés de substitution et de définition récursive qui s'expriment et se prouvent dans le cas échéant non seulement pour SFG mais pour un ensemble de systèmes obtenus de SFG, en ajoutant aux axiomes de ce système, un ensemble k formules ou des hypothèses ou encore des postulats propres à la théorie déterminée.

Aussi disons-nous que les théorèmes d'incomplétude s'appuient aussi sur une autre hypothèse, celle à l'effet que SFG est ω-cohérente. Cela signifie que SFG est cohérente, si et seulement si, aucune formule F(x) de SFG n'est telle que$\vdash_P \mathrm{F}(0), \vdash_P \mathrm{F}(0'), \vdash_P \mathrm{F}(\mathrm{d}'), \vdash_P \mathrm{F}(\mathrm{d}''), \dots et\ \ \vdash_P \neg\forall \mathrm{F}(\mathrm{x})$.

Prenant en compte les définitions des 45 propriétés (fonctions et prédicats récursifs) du système établi, il y a lieu d'énoncer cette condition, étant donné qu'il n'y a de a tel que :

$\forall n Dem_K(Sub(a, x, N(_n))) \wedge Dem_K(Neg(Gen(x, a)))$

On peut alors prouver qu'un système ω-cohérent est de fait cohérent [3].

Astuces et conditions de preuve de GÖDEL

Le mécanisme de démonstration de GÖDEL est exposé à partir de son mémoire [4]. Nous suivons ici les fils conducteurs de LADRIERE et d'autres approches démonstratives de MENDELSON (NEIL KENNEDY), DECONINCK MATTHIEU et J.-Y. GIRARD.

1. Le système formel pris en compte par GÖDEL est à la limite près celui des *Principia Mathematica* de RUSSELL et WHITE HEAD. Ce sytème est nommé SFG. Dans SFG on représente tous les concepts et toutes les relations de la théorie des nombres. Le SFG est supposé cohérent, du point de vue syntaxique.

2. L'arithmétisation de SFG peut s'effectuer comme suit :

Si Prop est une proposition de SFG, alors l'énoncé métathéorique Prop est prouvable dans SFG et s'exprime formellement comme un énoncé arithmétique qui, à son tour, est représenté par une proposition de SFG.

3. Soient, dans SFG, toutes les propositions contenant une variable individuelle qui est susceptible d'être un chiffre.

Elles sont en effet au plus dénombrables.

L'ensemble de ces propositions est arrangé au moyen d'une relation ordinatrice R* et sa $n^{\text{ième}}$ proposition est désignée par R*(n).

La relation R* est donc *représentable* dans SFG au moyen d'une expression R jouant le rôle d'un prédicat.

4. Si $\forall xa$ est une des propositions appartenant à l'ensemble des propositions ainsi arrangées. On désigne par $[\forall xa; n]$, la proposition b qui est obtenue en substituant de la variable individuelle a, par l'entier n. ce qui donne en effet :

L'énoncé métathéorique b ↔ $[\forall xa; n]$ est représentable dans SFG.

5. On désigne par Dem n l'énoncé métathéorique qui signifie que la proposition dont le ndg est n est prouvable dans SFG.

Soit la classe *Cl* des entiers qui est définie par l'équivalence suivante :

$(n\epsilon cl) \leftrightarrow\ \neg\ Dem\ [\forall xr; n]$.

Déduisons que la propriété d'appartenance à la classe *Cl* est représentable dans SFG par s, une expression prédicative et cela au moyen de laquelle il est possible de former une proposition $\forall xc$ ayant une variable individuelle. La proposition signifie que *x appartient à la classe Cl*.

Notons que la proposition $\forall xc$appartient à l'ensemble des propositions ayant une variable individuelle, et elle occupe un rang de cet ensemble. Supposons en effet que r soit ce rang. Donc on désigne cette proposition par R*(r). Ce qui donne $\forall xb\ \leftrightarrow R^{*}(r)$.

Il en résulte que l'énoncé métathéorique ne fait pas partie du SFG.

6. La proposition$[\forall xr; r]$ représente l'entier r fait partie du SFG. Mais, la proposition$[\forall xs; r]$ veut dire que l'entier r appartient à la classe Cl. Elle signifie cependant que la proposition$(\forall xs; r)$ ayant le nombre entier r appartient à la classe CL.

Donc, la proposition obtenue en remplaçant la variable x de $\forall xr$ n'est pas démontrable dans SFG.

En d'autres termes, la proposition $[\forall xr; r]$ affirme sa propre *indémontrabilité*. Donc elle est *indécidable*.

7. Si $[\forall xr; r]$ est prouvable, alors il est possible de déduire, dans SFG $[\forall xs; r]$, qui affirme que r appartient à la classe Cl, ou encore, en vertu de la définition de Cl, $\neg\ Dem\ [\forall xr; r]$ qui veut dire que la proposition $[\forall xr; r]$ n'est pas prouvable dans SFG. D'où, la contradiction.

Et si $[\forall xr; r]$ est indémontrable, ce qui veut dire que $\neg[\forall xr; r]$ est prouvable, alors il est possible de déduire, dans SFG,$\neg[\forall xs; r]$ c'est-à-dire *r n'appartient pas à Cl* ou partant de la définition de Cl, $\neg\neg\ Dem[\forall xr; r]$ est équivalente à $Dem[\forall xr; r]$ qui affirme qu'elle est prouvable dans SFG.

Supposons que SFG soit cohérent, cela conduit à une contradiction, car il n'est pas possible de prouver à la fois dans SFG une proposition et sa négation. D'où SFG renferme, au moins en son sein, une proposition *indécidable*.

La métathéorie du système formel est formulée donc dans une langue de base. Pour ce qui regarde le système formel, l'arithmétique récursive est perçue comme une théorie intuitive.

La preuve de GÖDEL tient compte de paramètres suivants :

- Le système formel gödelien contient une formalisation de l'arithmétique récursive.
- Grâce à la méthode d'arithmétisation, la métathéorie du système formel s'exprime au moyen de l'arithmétique récursive.
- Cette métathéorie est formalisée dans le système lui-même formel.

En bref, sur la base de l'arithmétisation, GÖDEL interprète partiellement son système dans sa métathéorie.

Remarquons que « Le théorème de GÖDEL, plus précisément sa preuve, nous dit exactement ce que WEYL (et Wittgenstein) avait saisi : la métathéorie n'est pas plus expressive que la théorie, car on peut l'encoder dans la théorie, sans perte de déductibilité (les lemmes de représentation). En plus, la cohérence, codée dans la théorie, permet de dériver G, ce qu'elle ne permet pas de faire au niveau méta-théorique. La méta-théorie de PA n'est donc qu'une sous-théorie de PA, modulo un codage. L'exact contraire de ce qu'espérait HILBERT. La preuve du théorème de normalisation de GIRARD, en ménageant de façon essentielle, métathéorie et théorie, dans une preuve de cohérence de l'analyse (en tant qu'arithmétique de l'ordre), cassera ultérieurement le prétendu rôle fondamental de cette distinction aussi commode qu'artificielle » [5].

10 CONCLUSION

La métathéorie s'évertue à chercher les conditions optimales de formalisations des théories scientifiques et des propriétés syntaxiques ou sémantiques des langages formalisés. En effet, le théorème d'incomplétude décrit une propriété particulière, l'incomplétude d'une théorie : l'arithmétique de PEANO. Sa démonstration exige qu'on se situe dans une métathéorie qui est aussi l'arithmétique de PEANO, considérée fondamentalement comme un système formel beaucoup plus faible. En construisant une formule indécidable dans un système formel qui contient l'arithmétique, GÖDEL recourt à la diagonalisation pour prouver l'indécidabilité ou l'incomplétude des théories logiques ou mathématiques.

REFERENCES

[1] H. Benis – Sinaceur, « Récursivité », *Encyclopédie Philosophique universelle*. *Les Notions philosophiques*, Tome 2, Philosophie occidentale ; M – Z. pensées asiatiques, conceptualisation des sociétés traditionnelles. Tables analytiques, Paris :PUF,pp.2188-2191, (1990).

[2] K. GÖDEL, E. NAGEL, J.R. NEWMANN et J.-Y. GIRARD : *Le théorème de GÖDEL*. Sources du savoir, Paris : Le Seuil, 1989.

[3] J. Ladriere, et Neil Kennedy, *Recherches logiques et philosophies sur le concept de métalogique*, inédit, Mémoire de Maîtrise en Philosophie/Université du Québec à Montréal, août 2006.

[4] K. GÖDEL, Uder Formale Unentscheidhare Sätze der Principia Mathematica und Verwardter Systeme, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38, pp. 174-176,1931.

[5] Giüseppe Longo, *Introduction aux théorèmes d'incomplétude : de Gôdel à Kruskal-Friedman*, *Revue de synthèse (Paris),* 4e s, n°1, janvier-mars, pp.111-138,1999.

[6] J. Ladrière : *Les limitations internes des formalismes. Etude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des Mathématiques*, Nawelaerts/Gauthier-Villards, Paris/Louvain, 1957.

[7] J.-Y. Girard, *Le Point aveugle*, Tome 1, *vers la perfection*, Hermann, 2007.