International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 21 No. 2 Sep. 2017, pp. 260-266

http://www.ijias.issr-journals.org/

SUR LA DETERMINATION DES VALEURS PROPRES D'UNE MATRICE CARREE ET SON INVERSE PAR L'ALGORITHME DE LEVERRIER

Apollinaire RUHANAMIRINDI NGOMBWA

Junior lecture at Teachers' Training College of Walungu, South Kivu, Province, RD Congo

ABSTRACT: The matrix calculation is taking presently more and more a great place in teaching as well as in research. The matrix properties are treated basically, the statement leads the reading progressively, from definition to different matrix types as well as to linear equation systems, to proper value problems and to differential equation systems resolution. The matrix calculation interests many mathematicians, Physicists, economists and so on. This work is aiming at studying squared matrix proper values determination, its inverse with Leverrier's algorithm, obliges determinant notions Knowledge beforehand.

KEYWORDS: Matrix calculation, Proper values ; Leverrier's algorithm.

RÉSUMÉ: Le calcul matriciel prend actuellement une place de plus en plus grande dans l'enseignement comme dans la recherche. Les propriétés des matrices sont traitées d'un point de vue élémentaire, l'exposé conduit le lecteur progressivement, de la définition aux différents types des matrices ainsi qu'aux applications aux systèmes d'équations linéaires, aux problèmes des valeurs propres et à la résolution des systèmes d'équations différentielles.
Le calcul matriciel intéresse pas mal d'étudiants mathématiciens, physiciens, économistes, etc.
Ce travail qui se propose de faire une étude sur la détermination des valeurs propres d'une matrice carrée, son inverse par l'algorithme de Leverrier, exige au préalable une connaissance des déterminants.

MOTS-CLEFS: calcul matriciel, valeurs propres, l'algorithme de Leverrier.

1 INTRODUCTION

Les travaux concernant la détermination des valeurs propres d'une matrice carrée procèdent par la recherche des racines du polynôme caractéristique, dites valeurs propres.

A chaque valeur propre correspond un ou plusieurs vecteurs propres. La détermination de l'inverse d'une matrice passe par la définition ou par la méthode des cofacteurs. Leverrier propose une autre méthode restée presque inconnue de la détermination de l'inverse d'une matrice carrée ainsi que son polynôme caractéristique.

Notre contribution est de vulgariser, d'expliciter et d'appliquer cet algorithme de Leverrier. L'objectif principal est la détermination du polynôme caractéristique d'une matrice carrée et son inverse par l'Algorithme de Leverrier.

2 DETERMINATION DES VALEURS PROPRES D'UNE MATRICE CARREE

2.1 DÉFINITION

Soit E un K espace vectoriel et $f \in l$ K(E).

Soit λ ∈ K, λ est une valeur propre de f si et seulement si l'endomorphisme ƒ-λId_E n'est pas injectif. Soit A ∈ Mn(K), Si l'on rapporte K^m à sa base canonique, A est la matrice de l'endomorphisme f de K^m qui à tout vecteur, colonne Y, fait correspondre le vecteur colonne Z défini par le produit matriciel Z=AY

2.2 RECHERCHE DU POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

Définition : **1. Soit E un K -**espace vectoriel de dimension finie et B={ℓ_1, $\ell_{2,\dots}$ ℓ_n} une base de E

Considérons un endomorphisme ƒ ∈ $lk(E)$ et sa matrice dans la base B, M== (a_{ij}) 1 ≤i ≤ j ≤ n

Si I_n est la matrice Unité d'ordre n, alors la matrice dans la base B de l'endomorphisme ƒ- λI aet M- λ$I_{n.}$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ et}$$

$$\text{dét } (M - \lambda\text{In}) \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \dots & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est un polynôme $P(\lambda)$ à coefficient dans K de degré n (la variable λ parcourant K d'une manière quelconque)

Définition 2 : P(λ) =dét (M- λIn) se nomme polynôme caractéristique de la matrice M ∈ $Mn(K)$

Exemple : Soit M une matrice carrée.

$$M= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Cherchons son polynôme caractéristique :

$$\text{Dét } (M - \lambda Id)= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(4-\lambda)\,(3-\lambda) - 2 = 0$$

$$12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

Ainsi λ est une valeur propre de M si et seulement si $\lambda = 5$ ou $\lambda = 2$

Le théorème suivant donne une propriété caractéristique des valeurs propres qui est fréquemment utilisée comme définition.

Théorème 1 : Soit T : V→ V un opérateur linéaire sur l'espace vectoriel sur K $\lambda \in K$ est une valeur propre de T si et seulement si l'opérateur $\lambda\text{I} - \text{T}$ est singulier. L'espace propre de λ est le noyau du $\lambda\text{I} - \text{T}$.

Démonstration : λ est une valeur propre de T si et seulement si il existe un vecteur non nul U tel que

$$\text{T(u)} = \lambda\text{u ou } (\lambda\text{I})(U) - T(U) = 0 \text{ } ou \text{ } (\lambda\text{I} - \text{T})(U) = 0.$$

$$\text{C'es} - \text{à} - \text{dire } \lambda\text{I} - \text{T est singulier}$$

Nous avons aussi démontré que U est un espace propre de λ si et seulement si les relations précédentes sont vérifiées ; donc U appartient au noyau de $\lambda\text{I} - \text{T}$

2.3 RECHERCHE DES VALEURS PROPRES

Soit E un K- espace vectoriel de dimension finie et f ∈ $l(E)$. Pour que le scalaire $\lambda \in K$ soit valeur propre il faut et faut et il suffit que

$$\text{dét } (f - \lambda\text{I}d_E) = 0.$$

$\mathrm{p(\lambda o)} = \mathrm{dét}\ (\mathrm{M} - \lambda \mathrm{oIn}) = 0$, c'est-à-dire que λo soit une racine du polynôme caractéristique de f. La détermination des valeurs propres d'un endomorphisme f d'un K- espace de dimension n équivaut donc à la recherche de zéros du polynôme caractéristique P de degré n de K $[x]$. On sait que, si un polynôme $p \in k[x]$ a Un zéros λ_1 de multiplicité h, existe q ∈ $k[x]$ tel que $p(x) = (x - \lambda_1)^h\ q(x)$, avec $q(\lambda_1) \neq 0$. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont r zéros des multiplicités respectives h_1, h_2, … , h_r, il existe un polynôme $q \in k[x]$ tel que $p(x) = (x - \lambda_1)^{h_1}\ (x - \lambda_2)^{h_2}\ \ldots\ (x - \lambda_r)^{h_r q}(x), avec\ q(\lambda_i) \neq 0$ $1 \leq i \leq r), on\ a\ alors\ \mathrm{h}_1 + \mathrm{h}_2 + \cdots \mathrm{h}_r \leq d^0(p)$

<u>Théorème2</u> : Théorème de CAYLEY HALILTON

Si $\mathrm{P(Y)} = \mathrm{dét}\ (\mathrm{B} - \mathrm{IY})Y^m + \mathrm{b}_1 Y^{m-1} + \cdots + b_{m-1}\ Y + b_m$ est le polynôme caractéristique de la matrice $B \in M_n(K)$, alors $P(B) = B^m + b_1 B^{m-1} + \cdots + b_{m-1}B + b_m I = 0$

Démonstration : Soit $B \in M_n(K)$,

La matrice caractéristique de B définie par

$$M(y) = Iy - B = \begin{pmatrix} Y - b_{11} & b_{12} \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & Y - b_{22} \ldots & b_{2n} \\ b_{m1} & b_{n2} \ldots & Y - b_{mm} \end{pmatrix}$$

est une valeur $M_n([K_Y])$ dont les coefficients sont des polynômes de degré au plus égal à un.

Le polynôme caractéristique de B est alors

$\mathrm{P(Y)} = \mathrm{dét}\ (M_Y) = Y^m + \mathrm{b}_1 Y^{m-1} + \cdots + b_m \in K[x]$.

La comatrice *N(Y)* de M(Y) est la transposée de la matrice des cofacteurs de *M(Y), N(Y)* est une matrice polynomiale.

D'après la formule ci-après les coefficients de N(Y) sont des polynômes de degré m-1 au plus.

Le produit $M(y)\ N(y) = P(y)I\ ou\ P(y)$ est le polynôme caractéristique de B. La matrice polynômiale N(y) s'écrit $D_1 Y^{m-1} + \cdots + D_{m-1}Y + D_m$ et on a $M(y) = I_y - B$

L'anneau des matrices carrées n-n, le cas des endomorphismes de U, rapporté à une base, $B = e_i, j \in I. I = [1, n]$, les matrices associées à f relativement à la base B, sont des matrices à n lignes et n colones, dites matrices carrées d'ordre n.

Le produit $M(y)\ N(y)$ dans l'anneau $M_m(K[Y])$, on obtient

$$D_1 Y^n + (D_2 - BD_1)Y^{m-1} + \cdots + (D_m - BD_{m-1})Y - BD_m = P(y)I$$

En identifiant les coefficients de $Y^k, 0 \leq k \leq n,$, dans les deux membres ci-haut, on a :

$$D_1 = I$$

$$D_2 - BD_1 = b_1 I$$

$$D_3 - BD_2 = b_2 I$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_m - BD_{m-1} = b_{bm-1} I$$

$$-BD_n = b_n I$$

En multipliant à gauche, par B^m la première relation par B^{m-1} la seconde, … par B l'avant dernière et par I la dernière, et en additionnant toutes les nouvelles égalités matricielles obtenues, il vient $0 = B^m + b_1 B^{m-1} + \cdots\ b_m I$

Exemple :

Trouvons les valeurs propres de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminons le polynôme caractéristique de B

$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow dét\ (B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$d\acute{e}t\ (B-\lambda I) = (4-\lambda)(1-\lambda) - 10$$
$$= \lambda^2 - 5\lambda - 6$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 6\ et\ \lambda_2 = -1$

Comme prévu, d'après le théorème de CAYLEY HAMILTON, B est un zéro de $\Delta(\lambda)$.

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 26 & 25 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 INVERSE D'UNE MATRICE CARREE PAR L4ALGORITHME DE LEVERRIER

3.1 INVERSE D'UNE MATRICE CARREE

3.1.1 DÉFINITION :

On dit qu'une matrice carrée B d'ordre m est inversible s'il existe une matrice B' d'ordre m telle que $\mathrm{B.B'} = \mathrm{B'.B} = I_m$

(I_m étant la matrice unité d'ordre n)

Si la matrice B' existe, elle est unique et se note B^{-1}

3.2 CALCUL DE L'INVERSE D'UNE MATRICE CARREE

Explicitons la transformation (T) donnant les y en fonction des x, et son déterminant D supposé non nul. La matrice cherchée A est le quotient par D de cette matrice

$$A = (\lambda_{ij}) = \frac{1}{D}(M_{ij})$$

Exemple1 : Vérifions si la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible.

Calculons le déterminant de D

$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{matrix} = 1$, d'où D est inversible, car $d\acute{e}t\ D \neq 0$

Exemple2 : Inversons la matrice $N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$|N| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$|N| = 2(2+4) - 3(4-4) + 1(-2-1)$$
$$|N| = 9$$

Comme $d\acute{e}t\ N \neq 0, alors\ N\ est\ inversible.$

Cherchons la comatrice (c) de N.

$b_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6$; $b_{12} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$; $b_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$;

$b_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -7$; $b_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$; $b_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$;

$b_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11$; $b_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6$; $b_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$;

$c = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -7 & 3 & 5 \\ 11 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ et $t_c = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

$$N^{-1} = \frac{1}{dét\ N}\ t_c N;\ N^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -7 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -3 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{11}{9} \\ 0 & \frac{3}{9} & \frac{6}{9} \\ -\frac{3}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{7}{9} & \frac{11}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

3.3 Inverse D'une Matrice Carree Par L'algorithme De Leverrier

1. L'algorithme de Leverrier permet de calculer le polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Il permet d'obtenir aussi l'inverse de la matrice de petite dimension, à cause des produits matriciels qu'il comporte. Comme nous les savons toujours en rapport avec l'algorithme de calcul, dans le cas où B(matriciel) est diagonale, les valeurs propres sont les éléments diagonaux. On utilise le polynôme caractéristique dont il facilite l'écriture. Il s'applique à la recherche des valeurs propres réelles d'une matrice carrée.

2. <u>Trace d'une matrice</u>

<u>Définition</u> : pour toute matrice $M \in (K)$, on appelle trace de M et l'on note $t_r(M)$, la somme des éléments de la diagonale principale.

$si\ M = (a_{ij})$, on a : $t_r(M) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$.

Remarquons maintenant que si P est le polynôme caractéristique de M, On a P(o)=dét M et Par conséquent, $P(\lambda) = (-1)^n\ \lambda^n + (-1)^{n-1}\ t_r(M)\lambda^{n-1} + \cdots dét\ M.$ Nous savons que le polynôme caractéristique P reste invariant dans un changement de base par conséquent.

<u>Propriété</u> : Pour toutes matrices semblables M et M' de $M_n(K) t_r(M') = t_r(M)$. Cette propriété justifie la définition suivante : On appelle trace d'un endomorphisme $f \in\ l(E)$ la trace de la matrice de f dans une base quelconque de E. On la note $t_r(f)$.

3. <u>METHODE DE LEVERRIER</u>

Elle consiste à calculer d'abord des sommes S_K au moyen des puissances B^k de la matrice B par la formule$\boldsymbol{S_K = T_r\ B^k}$, connaissant les sommes$\boldsymbol{S_K}$, on obtient les coefficients b_i du polynôme caractéristique.

Nous avons donc une méthode qui fournit exactement les coefficients du polynôme caractéristique. Mais les nombres d'opérations nécessaires interdit pratiquement son utilisation par des grandes valeurs de m. En effet, il faut former les puissances successives de B : calculer B^2 revient à calculer m^2 produits scalaires des valeurs de R^m, ce qui exige m^3 multiplications. Pour former $B^k = B.B\ K^{-1}$ en connaissant$B\ K^{-1}$, il faut également m^3 multiplications. Le coût total de la méthode est m^4 multiplications. L'algorithme fournit au passage, le cas échéant l'inverse de la matrice considérée. Le polynôme caractéristique étant un coefficient $(-1)^m$ près sous la forme : $P(\lambda) = \lambda^m - d_1\lambda^{m-1} - d_2\lambda^{m-2} \ldots - d_m$, l'algorithme de Leverrier pour une matrice B de dimension m est le suivant :

$$C_0 = Id(matrice\ idetité)$$

$$H_1 = BC_0 \rightarrow\ d_1 =\ T_r\ (H_1) \rightarrow C_1 = H_1 - d_1 Id$$

$$H_2 = BC_1 \rightarrow\ d_2 =\ \frac{1}{2} T_r\ (H_2) \rightarrow C_2 = H_2 - d_2 Id$$

$$H_m = BC_{m-1} \rightarrow \ d_m = \frac{1}{m} T_r\,(H_m) \rightarrow C_m = H_m - d_m Id$$

Comme nous le savons P(λ) étant le polynôme caractéristique, d'une matrice B, on P(B)=0

Si $P(y) = Y^n + d_1 Y^{n-1} + d_2 y^{n-2} + \cdots\ d_n$ est le polynôme caractéristique de B alors $B^n + d_1 B^{n-1} + d_2 B^{n-2} + \cdots\ d_n I_n = 0$ donc nous pouvons calculer l'inverse d'une matrice carrée par l'algorithme de Leverrier. La matrice C_n obtenue à la dernière étape de l'algorithme de Leverrier est identiquement nulle, en conséquence, si d_n est différent de zéro, la matrice B est inversible et son inverse est : $\boldsymbol{B^{-1} = \frac{1}{d_n} c_{n-1}}$

4. Polynôme caractéristique par l'algorithme de Leverrier.

Elle consiste à calculer A^2, A^3, … , A^n ce qui donne :

$\lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k = t_r(A^k) = S_k$ et on utilise la formule de Newton :

$$S_1 + a_1 = 0$$

$$S_2 + a_1 S_1 + 2a_2 = 0$$

$$S_k + a_1 S_{k-1} + \cdots a_{k-1} S_1 + a_k = 0,$$

qui donne successivement $a_2, a_3, \ldots, a_n$ à partir de $S_1, S_2, \ldots, S_n$. $S_k = T_r A^k$ connaissant les sommes S_k , on obtient les coefficients a_i du polynôme caractéristique. Pour tout polynôme caractéristique le coefficient dominant vaut 1.

Exemple a : Inversons la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ par la méthode habituelle. Cherchons le déterminant de B.

$dét\ B = |B| = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$=-56

Cherchons la comatrice de B

$$b_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11\ ;\ b_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7;\ \ b_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -13;$$

$$b_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5;\ b_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7;\ b_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11\ ;$$

$$b_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -19;\ b_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7;\ b_{31} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$C = \begin{pmatrix} 11 & -7 & -13 \\ -5 & -7 & 11 \\ -19 & 7 & -3 \end{pmatrix} \text{et} \quad t_c = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -19 \\ -7 & -7 & 7 \\ -13 & 11 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{détB} t_c \rightarrow\ B^{-1} = \frac{1}{-56} \begin{pmatrix} 11 & -5 & -19 \\ -7 & -7 & 7 \\ -13 & 11 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{56} & \frac{5}{56} & \frac{11}{56} \\ \frac{7}{56} & \frac{7}{56} & -\frac{7}{56} \\ \frac{13}{56} & -\frac{11}{56} & \frac{3}{56} \end{pmatrix}$$

b) Inversons la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ par l'algorithme de Leverrier.

Déterminons le polynôme caractéristique :

$$P_B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 & 3 \\ 2 & 5-\lambda & -1 \\ 3 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5-\lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)[(5-\lambda)(2-\lambda) + 1] - 4[2(2-\lambda) + 3] + 3[2 - 3\,(5-\lambda)]$$

$== (1-\lambda)(\lambda^2 - 11 - 7\lambda) - 4[(4-2\lambda) + 3] + 3\ [2 - (15 - 3\lambda)]$

$$(1-\lambda)[\lambda^2 - 7\lambda + 11] - 4[-2\lambda + 7] + 3[2 - 15 + 3\lambda]$$

$= \lambda^2 - 7\lambda + 11 - \lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 8\lambda$-28-39-9 $\lambda = -\lambda^3 + 8\lambda^2 + 21\lambda$-56

Comme $d_n = -56 \neq 0$ alors B est inversible

$$C_o = Id \rightarrow C_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = BC_o \rightarrow H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$d_1 = T_r(H_1) \rightarrow d_1 = 1 + 5 + 2 = 8$$

$$C_1 = H_1 - d_1 Id \rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = BC_2 \rightarrow H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & -19 \\ -7 & -8 & 7 \\ -13 & 11 & -4 \end{pmatrix}$$

$$d_2 = \frac{1}{2} T_r(H_2) \rightarrow d_2 = \frac{1}{2}(10 - 8 - 4) = -1$$

$$C_2 = H_2 - d_2 Id \rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} 10 & -5 & -19 \\ -7 & -8 & 7 \\ -13 & 11 & -4 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -19 \\ -7 & -7 & 7 \\ -13 & 11 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{d_n} C_{n-1} \rightarrow B^{-1} = -\frac{1}{56}\begin{pmatrix} 11 & -5 & -19 \\ -7 & -7 & 7 \\ -13 & 11 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{56} & \frac{5}{56} & \frac{11}{56} \\ \frac{7}{56} & \frac{7}{56} & -\frac{7}{56} \\ \frac{13}{56} & -\frac{11}{56} & \frac{3}{56} \end{pmatrix}$$

4 Conclusion

Pour notre travail, nous avons débuté par la détermination des valeurs propres d'une matrice carrée, et aboutir aux différentes propriétés qui nous ont permis de calculer l'inverse d'une matrice carrée qui reste identique à l'inverse d'une matrice carrée par l'algorithme de Leverrier. Nous avons montré que la plus part des méthodes utilisées dans les ouvrages consultés dans différentes bibliothèques, nulle part où on illustre l'algorithme de Leverrier, raison pour laquelle nous nous sommes concentrés à donner les détails à partir de ce présent travail pour traduire des résultats en analogues à la méthode habituelle. Dans la deuxième partie nous avons montré la marche à suivre à l'aide des exemples pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée par l'algorithme de Leverrier. Nous avons montré aussi que cet algorithme permet clairement et possiblement de trouver l'inverse d'une matrice carrée en s'appuyant sur le polynôme caractéristique. Cet algorithme peut donc remplacer la méthode habituellement enseignée et utilisée.

References

[1] AYERES Franck ; *Matrices, Cours et problèmes,* Série Schaum Mac Graw-Hill, Paris, 1986
[2] CONDAMINE, *Mathématiques Terminales, C.E Géométrie, de la grave* Paris 1971
[3] DANIEL PHAM ; *Technique du calcul matriciel avec la collaboration* de M. GHinea préface de Paris en 1973
[4] DONEDDU A ; *Polynômes et algèbre linéaire,* Vuilbert Paris 1984.
[5] FRANCOIS COTTET-EMARD ; *Mathématiques sur Ordinateur*, 1ère édition, 2ème tirage 1995 (De Boeck-wesmael Bruxelle 1993
[6] LIPSCHUTZ S. ; *algèbre linéaire, Cours et problèmes* série Schaum, Mc Graw-Hill 1987
[7] QUEYSANNE M ; *Algèbre 1er cycle scientifique préparation aux grandes écoles,* Armand Colin 1964