International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 20 No. 3 Jun. 2017, pp. 994-1010

http://www.ijias.issr-journals.org/

SUR UN ALGORITHME DE CONTINUITE SUR LES ESPACES D'ALEXANDROFF FINIS

PALUKU KASOKI CLARA

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE INFORMATIQUE, FACULTE DES SCIENCES,
UNIVERSITE PEDAGOGIQUE NATIONALE (UPN),
Kinshasa, RD Congo

ABSTRACT: Soit une paire d'espaces topologiques (X, τ_x) et (Y, τ_y). Une fonction $f: X \to Y$ $est\ dite\ continue\ si\ pour$ chaque sous-ensemble ouvert $S \subset Y, f^{-1}[S]$ est un ouvert de X.
Soient X un espace d'Alexandroff fini et une application $f: X \to X$. Dans cet article nous intéressons à la continuité de f à chaque point de X relativement aux différentes topologies distinctes définies sur X.
Cet exercice nous permet de décrire un algorithme de continuité d'une application f définie sur espace d'Alexandroff fini X.

KEYWORDS: Espace d'Alexandroff, base irréductible, fonction continue, algorithme.

1 INTRODUCTION

Soient X et Y deux espaces d'Alexandroff finis et une application $f: X \to Y$. L'application f est continue si et seulement si $f(U_p) \subset U'_p$ pour tout $p' \in Y$ et pout tout $p \in X$ tel que $f(p) = p'$. Les U_p sont les éléments de la base irréductible de l'espace d'Alexandroff X et les U'_p sont les éléments de la base irréductible de l'espace d'Alexandroff Y.

Ce résultat capital permet d'examiner successivement la continuité d'une application f définie sur un espace d'Alexandroff fini vers lui-même ($f : X \to X$).

$Plus\ concr$è$tement\ soit\ un\ espace\ d'Alexandro$ff fini X à 3 éléments sur lequel nous définissons 9 topologies distinctes et 27 applications différentes pour lesquelles nous examinons la continuité relativement à chacune de ces 9 topologies.

Ce long exercice nous permet de décrire un algorithme de continuité d'une application $f: X \to X$.

2 PRÉLIMINAIRES SUR LES ESPACES D'ALEXANDROFF [1], [2], [5]

2.1 DÉFINITION[5]

Soit X un ensemble non vide et τ une topologie sur X. τ est une topologie d'Alexandroff ou l'espace topologique (X, τ) est un espace d'Alexandroff lorsque toute intersection d'une famille (finie ou infinie) d'ouverts de (X, τ) est un ouvert de (X, τ).

Par conséquent toute réunion (finie ou infinie) d'une famille des fermés de (X, τ) est un fermé de (X, τ).

2.2 DÉFINITION

Soit τ une topologie d'Alexandroff sur l'ensemble X. Soit τ^* l'ensemble des fermés de (X, τ) $c'est$ à $dire$ $\tau^* = \{S \subset X: X/S \in \tau\}$.

Si τ^* forme une topologie sur X, τ^* est appelé dans ce cas la co-topologie de τ.

2.3 EXEMPLES

1. Les espaces topologiques discrètes et les espaces topologiques finis sont des espaces d'Alexandroff. [5]
2. Soit X = $\{a, b, c, d\}$. Considérons la topologie $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$

L'ensemble des fermées de cette topologie est $\tau^* = \{\emptyset, \{a, c, d\}, X\}$ qui est aussi une topologie sur X, donc une co-topologie de τ.

2.4 THÉORÈME

Soit τ est une topologie sur X. Alors τ est une topologie d'Alexandroff si et seulement si τ admet une co-topologie sur X.

Preuve

Si τ est une topologie d'Alexandroff sur X et τ^* = $\{S \text{ c } X: X\backslash S \in \tau\}$ est l'ensemble des fermés de (X, τ), on a clairement que $\emptyset \in \tau^*$, $X \in \tau^*$ par définition de $\emptyset \in \tau^*$. Si A, B $\in \emptyset \in \tau^*$, alors $X\backslash A \in \tau$ et $X\backslash B \in \tau$. D'où (X\A) ∪ (X\B) = $X(A \cap B) \in \tau$ (car τest une topologie, c'est-à-dire que A∩ $B \in \tau^*$.

De même si $A_\propto \in \tau^*$ $\forall \alpha \in \Gamma$, alors X$\backslash A_\alpha \in \tau$ $\forall_a$ Γ

Comme τ est une topologie d'Alexandroff sur X, il suit que ∩ {X$\backslash A_\alpha$: $\propto \in \Gamma$} = X$\backslash$($\cup_{\propto \in \Gamma}$ A_α) appartient à τ. Ceci montre que U{ $A_\propto$/$\propto \in \Gamma$ }$\in \tau^*$ Ainsi τ^* est une topologie sur X

Réciproquement, supposons que τ admette une co-topologie τ^*. Montrons que τ est une topologie d'Alexandroff.

Soit {V_i : i ∈ I} une famille d'ouverts dans (X, τ), il faut montrer que ∩ $\{V_i: i \in I\}$ est un ouvert dans (X,τ), c'est-à-dire que son complémentaire est fermé.

Par les lois de DeMorgan on a : X\(∩ $\{V_i : i \in I\}) = \cup(X\backslash\ ) \in \tau^*$car chaque X$\backslash V_i \in \tau^*$, τ^* étant une topologie par hypothèse.

D'où X\(∩ $\{V_i : i \in I\}$) est un fermé dans (X, τ) et ainsi ∩ $\{V_i : i \in I\}$ est un ouvert dans (X, τ). Ceci montre que τ est une topologie d'Alexandroff.

2.5 DÉFINITION

Soit (X, τ) un espace d'Alexandroff fini.

Pour tout élément p dans X, on pose U_p $=\cap \{V \subset X: V \textit{ est un ouvert de } X \textit{ et } p \in V\}$.

En d'autres termes U_p est le plus petit (au sens de l'inclusion ensembliste) ouvert contenant p.

La famille $\mathcal{B} = \{U_p: p \in X\}$ s'appelle base irréductible de X.

Cette famille joue un rôle capital dans les espaces d'Alexadroff.

2.6 PROPOSITION[6]

Tout espace d'Alexandroff fini possède une base irréductible.

2.7 EXEMPLE

Soit X = $\{a, b, c\}$ et $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ une topologie d'Alexandroff sur X. Alors $\mathcal{B} = \{U_a, U_b, U_c\}$ $où$ $U_a = \{a\}, U_b = \{a, b, c\}$ et $U_c = \{a, c\}$, est la base irréductible l'espace d'Alexandroff (X, τ)

3 CONTINUITÉ DANS LES ESPACES D'ALEXANDROFF FINIS

3.1 DÉFINITION

Soit une paire d'espaces topologiques (X,τ_x) et (Y, τ_y).

Une fonction f: X → Y est dite continue si et seulement si pour chaque ouvert S de Y, $f^{-1}[S]$ est un ouvert de X.

La continuité des fonctions définies entre les espaces d'Alexandroff s'exprime en fonction des éléments U_p de sa base irréductible comme le démontrent les trois résultats suivants.

3.2 THÉORÈME

Soient X et Y des espaces d'Alexandroff finis et f : X→ Y une application. Alors f est continue sur X si et seulement si $f(U_p) \subset U_{f(p)}$ pour tout p∈ X.

Preuve

Supposons d'abord f *continue et soit* $p \in X$. Comme $f(p) \in U_{f(p)}$ et $U_{f(p)}$ est un voisinage de $f(p)$ *dans* Y, par la continuité de f *au point* p, *il existe* V *un ouvert* de X tel que p∈ V *et* $f(V) \subset U_{f(p)}$ Alors $U_p \subset V$ *et* $f(U_p) \subset f(V) \subset U_{f(p)}$ donnent l'inclusion $f(U_p) \subset U_{f(p)}$

Réciproquement supposons que pour tout $p \in X, f(U_p) \subset U_{f(p)}$. Fixons p∈ X et montrons que f *est* continue en p.

Soit W un voisinage ouvert de $f(p)$ *dans* Y. *Clairement*

$U_{f(p)} \subset W$ *et par hypothèse* $f(U_p) \subset U_{f(p)}$.

D'où $f(U_p) \subset U_{f(p)} \subset w$. Comme U_p est un voisinage de p dans X tel que $f(U_p)$ est contenu dans W, on conclut que f *est continue au point* p.

3.3 COROLLAIRE

Une application $f: X \to Y$ *entre deux espaces d'Alexandroff* X *et* Y est continue si et seulement si $f(U_p) \subset U_{p'}$ pour tout $p \in X$ *et* $p' \in Y$ tel que $f(p) = p'$.

3.4 THÉORÈME

Soient X et Y deux espaces d'Alexandroff et $f: X \to Y$ une bijection. Alors f *est un* homéomorphisme si et seulement si $f(U_p) = U_{f(p)}$, *pour* tout $p \in X$ c'est-à-dire $U_p = f^{-1}(U_{f(p)})$ *pour tout* $p \in X$.

Preuve

Supposons que $f(U_p) = U_{f(p)}$. Comme $f(U_p) \subset U_{f(p)} \forall p \in X$, par le théorème 3.2 f est continue.

Pour la continuité de $f^{-1} : Y \to X$. *Soit* $y \in Y$ *alors il existe* $p \in X$ unique $y = f(p)$ c'est-à-dire que $p = f^{-1}(y)$. D'où

$f^{-1}(U_y) = f^{-1}(U_{f(p)}) = f^{-1}(f(U_p)) = U_p = U_{f^{-1}(y)}$.

Donc $f^{-1}(U_y) \subset U_{f^{-1}(Y)}$ $\forall y = f(p) \in Y$, *ce qui* montre que f^{-1} est continue d'après le théorème 3.2.

Ainsi f *et* f^{-1} *sont* continues, d'où f est un homéomorphisme. Réciproquement, supposons que f est un homéomorphisme et soit $p \in X$. Il existe un unique y dans Y tel que y = $f(p)$, c'est-à-dire que p=$f^{-1}(y)$.

Par la continuité de f^{-1} on a $f^{-1}(U_y) \subset U_{f^{-1}(y)}$

D'où $f(U_p) \subset U_{f(p)} = U_y = f\left(f^{-1}(U_y)\right) \subset f(U_{f^{-1}(y)}) = f(U_p)$; *ce* qui montre l'égalité $f(U_p) = U_{f(p)}$

4 ALGORITHME DE CONTINUITÉ SUR LES ESPACES D'ALEXANDROFF FINIS X À N ÉLÉMENT

Pour établir cet algorithme nous travaillons avec un espace d'Alexandroff fini X à 3 éléments sur lequel il est défini 9 topologies distinctes [4] et 27 applications différentes définies de X dans lui-même.

On étudie la continuité de chaque application relativement aux 9 topologies définies sur X.

4.1 TOPOLOGIES DÉFINIES SUR UN ENSEMBLE FINI X À 3 ÉLÉMENTS[4]

Soit un ensemble fini X à 3 éléments, X = $\{a, b, c\}$. Les familles suivantes sont des topologies distinctes définies sur X.

$\tau_1 = \{\phi, X\}$

$\tau_2 = \{\phi, \{a\}, X\}$

$\tau_3 = \{\phi, \{a,b\}, X\}$

$\tau_4 = \{\phi, \{a\}, \{a,b\}, X\}$

$\tau_5 = \{\phi, \{a\}, \{b,c\}, X\}$

$\tau_6 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$

$\tau_7 = \{\phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, X\}$

$\tau_8 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, X\}$

$\tau_9 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$

Les espaces (X, τ_i) avec $i = 1,2, \ldots ,9$ sont des espaces topologiques finis donc d'après 2.3 des espaces d'Alexandroff admettant chacun une base irréductible.

Les bases irréductibles pour les 9 topologies sont :

$\mathcal{B}_1 = \{U_a, U_b, U_c\}$ où $U_a = U_b = U_c$=$\{a, b, c\}$ pour la topologie τ_1

$\mathcal{B}_2 = \{U_a, U_b, U_c\}$ où $U_a = \{a\}$ et U_b=$U_c = \{a, b, c\}$ pour τ_2

$\mathcal{B}_3 = \{U_a, U_b, U_c\}$ où $U_a = U_b$=$\{a, b\}et$ $U_c = \{a, b, c\}$ pour τ_3

$\mathcal{B}_4 = \{U_a, U_b, U_c\}$ où $U_a = \{a\}$, U_b=$\{a, b\}$ et $U_c = \{a, b, c\}$ pour τ_4

$\mathcal{B}_5 = \{U_a, U_b, U_c\}$ où $U_a = \{a\}$ et U_b=$U_c = \{b, c\}$ pour τ_5

$\mathcal{B}_6 = \{U_a, U_b, U_c\}$ où $U_a = \{a\}$, U_b=$\{b\}$ et $U_c = \{a, b, c\}$ pour τ_6

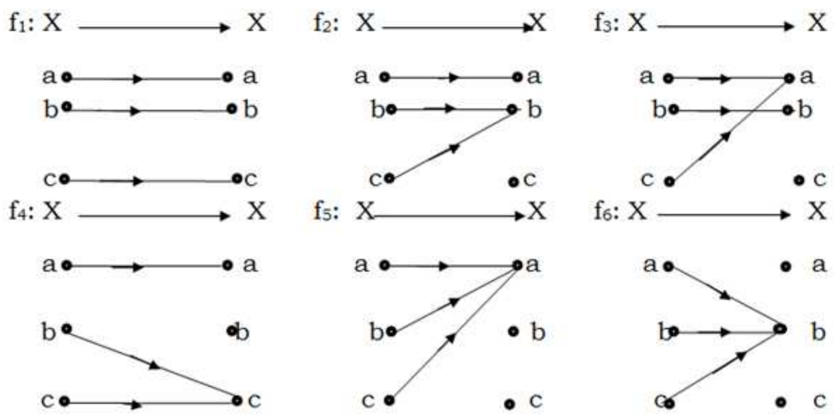
$\mathcal{B}_7 = \{U_a, U_b, U_c\}$ où $U_a = \{a\}$, U_b=$\{a, b\}$ et $U_c = \{a, c\}$ pour τ_7

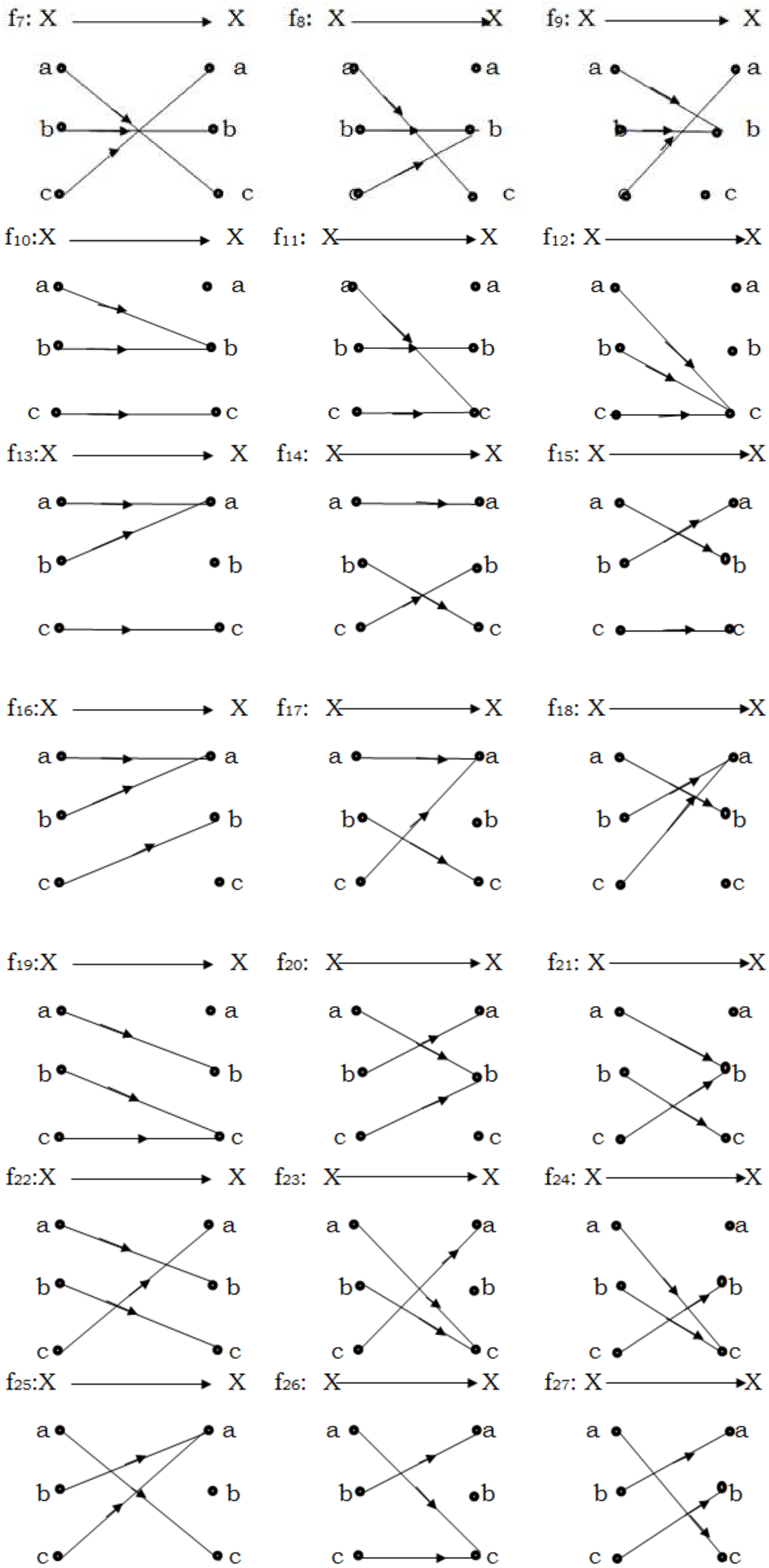
$\mathcal{B}_8 = \{U_a, U_b, U_c\}$ où $U_a = \{a\}$, U_b=$\{b\}$ et $U_c = \{b, c\}$ pour τ_8

$\mathcal{B}_9 = \{U_a, U_b, U_c\}$ où $U_a = \{a\}$, U_b=$\{b\}$ et $U_c = \{c\}$ pour τ_9

4.2 LES DIFFÉRENTES APPLICATIONS DÉFINIES DE X$= \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ $\boldsymbol{vers\ lui\ m}$Ê$\boldsymbol{me}$

Puisque X a 3 éléments, il y a 27 (3^3) applications de X vers X. Ces applications sont les suivantes :



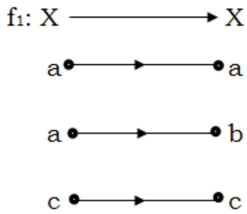


4.3 Continuité de ces 27 applications définies de X dans X relativement aux 9 topologies définies sur X = $\{a, b, c\}$

Pour établir la continuité de chaque application nous utilisons le théorème 3.2. C'est-à-dire pour tout $i = 1,2, \dots ,27$ f_i est continue sur X si et seulement si $f_i(U_p) \subset U_{f_i(p)}$ pour tout $P \in X$.

Dans cet article nous avons étudié la continuité de 4 applications f_1, f_3, f_5 et f_{20} que nous avons choisies au hasard.

4.3.1 CONTINUITÉ DE f_1 PAR RAPPORT AUX 9 TOPOLOGIES



1) Continuité de f_1 par rapport à τ_1

$$X = \{a,b,c\}, \tau_1 = \{\phi, X\} \text{ où } U_a = U_b = U_c = X$$

$$f_1(a) = a \text{ et } U_{f_1(a)} = U_a = X; f_1[U_a] = f_1[X] = X \subset U_{f_1(a)} \Rightarrow f_1 \text{continu en } a$$

$$f_1(b) = b \text{ et } U_{f_1(b)} = U_b = X; f_1[U_b] = f_1[X] = X \subset U_{f_1(b)} \Rightarrow f_1 \text{ continu en } b$$

$$f_1(c) = c \text{ et } U_{f_1(c)} = U_c = X; f_1[U_c] = f_1[X] = X \subset U_{f_1(c)} \Rightarrow f_1 \text{ continu en } c$$

Donc f_1 est continu sur X relativement à τ_1 car il est continu en tout élément de X.

2) Continuité de f_1 par rapport à

$$\tau_2 = \{\phi, \{a\}, X\} \text{ où } U_a = \{a\} \text{ et } U_b = U_c = X$$

$$f_1(a) = a \text{ et } U_{f_1(a)} = U_a = \{a\}, f_1[U_a] = f_1[\{a\}] = \{a\} \subset U_{f_1(a)} \Rightarrow f_1 \text{ continu en } a$$

$$f_1(b) = b \text{ et } U_{f_1(b)} = U_b = X; f_1[U_b] = f_1[X] = X \subset U_{f_1(b)} \Rightarrow f_1 \text{ continu en } b$$

$$f_1(c) = c \text{ et } U_{f_1(c)} = U_c = X; f_1[U_c] = f_1[X] = X \subset U_{f_1(c)} \Rightarrow f_1 \text{ continu en } c$$

Donc f_1 est continu sur X relativement à τ_2 car il est continu en tout élément de X.

3) Continuité de f_1 par rapport à

$$\tau_3 = \Big\{\phi, \{a,b\}, X\Big\} \text{ où } U_a = U_b = \{a,b\} \text{ et } U_c = X$$

$$f_1(a) = a \text{ et } U_{f_1(a)} = U_a = \{a,b\}; f_1[U_a] = f_1[\{a,b\}] = \{a,b\} \subset U_{f_{(1)}(a)} \Rightarrow f_1 \text{ continu en } a$$

$$f_1(b) = b \text{ et } U_{f_1(b)} = U_b = \{a,b\}; f_1[U_b] = f_1[\{a,b\}] = \{a,b\} \subset U_{f_{(1)}(b)} \Rightarrow f_1 \text{ continu en } b$$

$$f_1(c) = c \text{ et } U_{f_1(c)} = U_c = X; f_1[U_c] = f_1[X] = X \subset U_{f_1(c)} \Rightarrow f_1 \text{ continu en } c$$

Donc f_1 est continu sur X relativement à τ_3 car il est continu en tout élément de X.

4) Continuité de f_1 par rapport à

$\tau_4 = \{\phi, \{a\}, \{a,b\}, X\}$ où $U_a = \{a\}, U_b = \{a,b\}$ et $U_c = X$

$f_1(a) = a$ et $U_{f_1(a)} = U_a = \{a\}; f_1[U_a] = f_1[\{a\}] = \{a\} \subset U_{f_{(1)}(a)} \Rightarrow f_1$ continu en a

$f_1(b) = b$ et $U_{f_1(b)} = U_b = \{a,b\}; f_1[U_b] = f_1[\{a,b\}] = \{a,b\} \subset U_{f_{(1)}(b)} \Rightarrow f_1$ continu en b

$f_1(c) = c$ et $U_{f_1(c)} = U_c = X; f_1[U_c] = f_1[X] = X \subset U_{f_1(c)} \Rightarrow f_1$ continu en c

Donc f_1 est continu sur X relativement à τ_4 car il est continu en tout élément de X.

5) Continuité de f_1 par rapport à

$\tau_5 = \{\phi, \{a\}, \{a,b\}, X\}$ où $U_a = \{a\}$ et $U_b = U_c = \{b,c\}$

$f_1(a) = a$ et $U_{f_1(a)} = U_a = \{a\}; f_1[U_a] = f_1[\{a\}] = \{a\} \subset U_{f_{(1)}(a)} \Rightarrow f_1$ continu en a

$f_1(b) = b$ et $U_{f_1(b)} = U_b = \{b,c\}; f_1[U_b] = f_1[\{b,c\}] = \{b,c\} \subset U_{f_{(1)}(b)} \Rightarrow f_1$ continu en b

$f_1(c) = c$ et $U_{f_1(c)} = U_c = \{b,c\}; f_1[U_c] = f_1[\{b,c\}] = \{b,c\} \subset U_{f_1(c)} \Rightarrow f_1$ continu en c

Donc f_1 est continu sur X relativement à τ_5 car il est continu en tout élément de X.

6) Continuité de f_1 par rapport à

$\tau_6 = \{\phi, \{a\}, \{a,b\}, X\}$ où $U_1 = \{a\}$ et $U_b = \{b\}$ et $U_c = X$

$f_1(a) = a$ et $U_{f_1(a)} = U_a = \{a\}; f_1[U_a] = f_1[\{a\}] = \{a\} \subset U_{f_{(1)}(a)} \Rightarrow f_1$ continu en a

$f_1(b) = b$ et $U_{f_1(b)} = U_b = \{b\}; f_1[U_b] = f_3[\{b\}] = \{b\} \subset U_{f_{(1)}(b)} \Rightarrow f_1$ continu en b

$f_1(c) = c$ et $U_{f_1(o)} = U_c = X; f_1[U_c] = f_1[X] = X \subset U_{f_1(c)} \Rightarrow f_1$ continu en c

Donc f_1 est continu sur X relativement à τ_6 car il est continu en tout élément de X.

7) Continuité de f_1 par rapport à

$\tau_7 = \{\phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, X\}$ où $U_a = \{a\}$ et $U_b = \{a,b\}$ et $U_c = \{a,c\}$

$f_1(a) = a$ et $U_{f_1(a)} = U_a = \{a\}; f_1[U_a] = f_1[\{a\}] = \{a\} \subset U_{f_{(1)}(a)} \Rightarrow f_1$ continu en a

$f_1(b) = b$ et $U_{f_1(b)} = U_b = \{a,b\}; f_1[U_2] = f_3[\{a,b\}] = \{a,b\} \subset U_{f_{(1)}(b)} \Rightarrow f_1$ continu en b

$f_1(c) = c$ et $U_{f_1(c)} = U_c = \{a,c\}; f_1[U_c] = f_1[\{a,c\}] = \{a,c\} \subset U_{f_1(c)} \Rightarrow f_1$ continu en c

Donc f_1 est continu sur X relativement à τ_7 car il est continu en tout élément de X.

8) Continuité de f_1 par rapport à

$\tau_8 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, X\}$ où $U_a = \{a\}$ et $U_b = \{b\}$ et $U_c = \{a,c\}$

$$f_1(a)=a \ \ et \ \ U_{f_1(a)}=U_a=\{a\};\ f_1[U_a]=f_1[\{a\}]=\{a\}\subset U_{f_{(1)}(a)} \Rightarrow f_1 \ \ continu \ \ en \ \ a$$

$$f_1(b)=b \ \ et \ \ U_{f_1(b)}=U_b=\{b\};\ f_1[U_b]=f_3[\{b\}]=\{b\}\subset U_{f_{(1)}(b)} \Rightarrow f_1 \ \ continu \ \ en \ \ b$$

$$f_1(c)=c \ \ et \ \ U_{f_1(c)}=U_c=\{b,c\};\ f_1[U_c]=f_1[\{b,c\}]=\{b,c\}\subset U_{f_1(c)} \Rightarrow f_1 \ \ continu \ \ en \ \ c$$

Donc f_1 est continu sur X relativement à τ_8 car il est continu en tout élément de X.

9) Continuité de f_1 par rapport à

$$\tau=\{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},X\} \ \ où \ U_a=\{a\} \ \ et \ \ U_b=\{b\} \ \ et \ \ U_c=\{c\}$$

$$f_1(a)=a \ \ et \ \ U_{f_1(a)}=U_a=\{a\};\ f_1[U_a]=f_1[\{a\}]=\{a\}\subset U_{f_{(1)}(a)} \Rightarrow f_1 \ \ continu \ \ en \ \ a$$

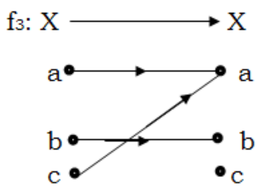
$$f_1(b)=b \ \ et \ \ U_{f_1(b)}=U_b=\{b\};\ f_1[U_b]=f_1[\{b\}]=\{b\}\subset U_{f_{(1)}(b)} \Rightarrow f_1 \ \ continu \ \ en \ \ b$$

$$f_1(c)=c \ \ et \ \ U_{f_1(c)}=U_c=\{c\};\ f_1[U_c]=f_1[\{c\}]=\{c\}\subset U_{f_1(c)} \Rightarrow f_1 \ \ continu \ \ en \ \ c$$

Donc f_1 est continu sur X relativement à τ_9 car il est continu en tout élément de X.

Conclusion : L'application f_1 est continue sur *X* relativement aux topologies $\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5,\tau_6,\tau_7,\tau_8 \ et \ \tau_9$ définies sur *X*

4.3.2 CONTINUITÉ DE f_3 PAR RAPPORT AUX 9 TOPOLOGIES



1) Continuité de f_3 par rapport à $\tau_1=\{\phi,X\}$ $où \ U_a=U_b=U_c=X$

$$f_3(a)=a \ \ et \ \ U_{f_3(a)}=U_a=X;\ f_3[U_a]=f_3[X]=\{a,b\}\subset U_{f_3(a)} \Rightarrow f_3 \ \ continu \ \ en \ \ a$$

$$f_3(b)=b \ \ et \ \ U_{f_3(b)}=U_b=X;\ f_3[U_b]=f_3[X]=\{a,b\}\subset U_{f_3(b)} \Rightarrow f_3 \ \ continu \ \ en \ \ b$$

$$f_3(c)=a \ \ et \ \ U_{f_3(c)}=U_a=X;\ f_3[U_c]=f_3[X]=\{a,b\}\subset U_{f_3(c)} \Rightarrow f_3 \ \ continu \ \ en \ \ c$$

Donc f_3 est continu sur X relativement à τ_1 car il est continu en tout élément de X.

2) Continuité de f_3 par rapport à

$$\tau_2=\{\phi,\{a\},X\} \ \ où \ U_a=\{a\},U_b=U_c=X$$

$$f_3(a)=a \ \ et \ \ U_{f_3(a)}=U_a=\{a\};\ f_3[U_a]=f_3[\{a\}]=\{a\}\subset U_{f_3(a)} \Rightarrow f_3 \ continu \ en \ a$$

$$f_3(b)=b \ \ et \ \ U_{f_3(b)}=U_b=X;\ f_3[U_b]=f_3[X]=\{a,b\}\subset U_{f_3(b)} \Rightarrow f_3 \ continu \ en \ b$$

$$f_3(c)=a \ \ et \ \ U_{f_3(c)}=U_a=\{a\};\ f_3[U_c]=f_3[X]=\{a,b\}\not\subset U_{f_3(c)} \Rightarrow f_3 \ non \ continu \ en \ c$$

Donc f_3 n'est pas continu sur X relativement à τ_2 car il est non continu c.

3) Continuité de f_3 par rapport à

$\tau_3 = \{\phi, \{a,b\}, X\}$ où $U_a = \{a,b\} = U_b$ et $U_c = X$

$f_3(a) = a$ et $U_{f_3(a)} = U_a = \{a,b\}$; $f_3[U_a] = f_3[\{a,b\}] = \{a,b\} \subset U_{f_3(a)} \Rightarrow f_3$ continu en a

$f_3(b) = b$ et $U_{f_3(b)} = U_b = \{a,b\}$; $f_3[U_b] = f_3[\{a,b\}] = \{a,b\} \subset U_{f_3(b)} \Rightarrow f_3$ continu en b

$f_3(c) = a$ et $U_{f_3(c)} = U_a = \{a,b\}$; $f_3[U_c] = f_3[X] = \{a,b\} \subset U_{f_3(c)} \Rightarrow f_3$ continu en c

Donc f_3 est continu sur X relativement à τ_3 car il est continu en tout élément de X.

4)Continuité de f_3 par rapport à

$\tau_4 = \{\phi, \{a\}, \{a,b\}, X\}$ où $U_a = \{a\}, U_b = \{a,b\}$ et $U_c = X$

$f_3(a) = a$ et $U_{f_3(a)} = U_a = \{a\}$; $f_3[U_a] = f_3[\{a\}] = \{a\} \subset U_{f_3(a)} \Rightarrow f_3$ continu en a

$f_3(b) = b$ et $U_{f_3(b)} = U_b = \{a,b\}$; $f_3[U_b] = f_3[\{a,b\}] = \{a,b\} \subset U_{f_3(b)} \Rightarrow f_3$ continu en b

$f_3(c) = a$ et $U_{f_3(c)} = U_a = \{a\}$; $f_3[U_c] = f_3[X] = \{a,b\} \not\subset \{a\} = U_{f_3(c)} \Rightarrow f_3$ non continu en c

Donc f_3 n'est pas continu sur X relativement à τ_4 car il est non continu en c.

5)Continuité de f_3 par rapport à

$\tau_5 = \{\phi, \{a\}, \{b,c\}, X\}$ où $U_a = \{a\}, U_b = U_c = \{b,c\}$

$f_3(a) = a$ et $U_{f_3(a)} = U_a = \{a\}$; $f_3[U_a] = f_3[\{a\}] = \{a\} \subset U_{f_3(a)} \Rightarrow f_3$ continu en a

$f_3(b) = b$ et $U_{f_3(b)} = U_b = \{b,c\}$; $f_3[U_b] = f_3[\{b,c\}] = \{a,b\} \not\subset \{b,c\} = U_{f_3(b)} \Rightarrow f_3$ non continu en b

$f_3(c) = a$ et $U_{f_3(c)} = U_a = \{a\}$; $f_3[U_c] = f_3[\{b,c\}] = \{a,b\} \not\subset \{a\} = U_{f_3(c)} \Rightarrow f_3$ non continu en c

Donc f_3 n'est pas continu sur X relativement à τ_5 car il est non continu en b et c.

6) Continuité de f_3 par rapport à

$\tau_6 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$ où $U_a = \{a\}, U_b = \{b\}$ et $U_c = X$

$f_3(a) = a$ et $U_{f_3(a)} = U_a = \{a\}$; $f_3[U_a] = f_3[\{a\}] = \{a\} \subset U_{f_3(a)} \Rightarrow f_3$ continu en a

$f_3(b) = b$ et $U_{f_3(b)} = U_b = \{b\}$; $f_3[U_b] = f_3[\{b\}] = \{b\} \subset U_{f_3(b)} \Rightarrow f_3$ continu en b

$f_3(c) = a$ et $U_{f_3(c)} = U_a = \{a\}$; $f_3[U_c] = f_3[X] = \{a,b\} \not\subset \{a\} = U_{f_3(c)} \Rightarrow f_3$ non continu en c

Donc f_3 non continu sur X car il est non continu en c.

7) Continuité de f_3 par rapport à

$\tau_7 = \{\phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, X\}, U_a = \{a\}, U_b = \{a,b\}$ et $U_c = \{a,c\}$

$f_3(a) = a$ et $U_{f_3(a)} = U_a = \{a\}$; $f_3[U_a] = f_3[\{a\}] = \{a\} \subset U_{f_3(a)} \Rightarrow f_3$ continu en a

$f_3(b) = b$ et $U_{f_3(b)} = U_b = \{a,b\}$; $f_3[U_b] = f_3[\{a,b\}] = \{a,b\} \subset U_{f_3(b)} \Rightarrow f_3$ continu en b

$f_3(c) = a$ et $U_{f_3(c)} = U_a = \{a\}$; $f_3[U_c] = f_3[\{a,c\}] = \{a\} \subset U_{f_3(c)} \Rightarrow f_3$ continu en c

Donc f_3 est continu sur X relativement à τ_7 car il est continu en tout élément de X.

8) Continuité de f_3 par rapport à

$$\tau_8 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, X\}, U_a = \{a\}, U_b = \{b\} \text{ } et \text{ } U_c = \{b,c\}$$

$$f_3(a) = a \quad et \quad U_{f_3(a)} = U_a = \{a\}; f_3[U_a] = f_3[\{a\}] = \{a\} \subset U_{f_3(a)} \Rightarrow f_3 \text{ } continu \text{ } en \text{ } a$$

$$f_3(b) = b \quad et \quad U_{f_3(b)} = U_b = \{b\}; f_3[U_b] = f_3[\{b\}] = \{b\} \subset U_{f_3(b)} \Rightarrow f_3 \text{ } continu \text{ } en \text{ } b$$

$$f_3(c) = a \quad et \quad U_{f_3(c)} = U_a = \{a\}; f_3[U_c] = f_3[\{b,c\}] = \{a,b\} \not\subset U_{f_3(c)} \Rightarrow f_3 \text{ } non \text{ } continu \text{ } en \text{ } c$$

Donc f_3 n'est pas continu sur X relativement à τ_8 car il est non continu en c.

9) Continuité de f_3 par rapport à

$$\tau_9 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, X\} \text{ } où \text{ } U_a = \{a\}, U_b = \{b\} \text{ } et \text{ } U_c = \{c\}$$

$$f_3(a) = a \quad et \quad U_{f_3(a)} = U_a = \{a\}; f_3[U_a] = f_3[\{a\}] = \{a\} \subset U_{f_3(a)} \Rightarrow f_3 \text{ } continu \text{ } en \text{ } a$$

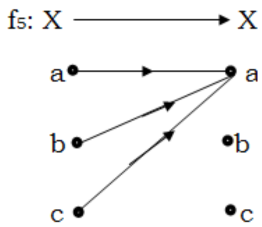
$$f_3(b) = b \quad et \quad U_{f_3(b)} = U_b = \{b\}; f_3[U_b] = f_3[\{b\}] = \{b\} \subset U_{f_3(b)} \Rightarrow f_3 \text{ } continu \text{ } en \text{ } b$$

$$f_3(c) = a \quad et \quad U_{f_3(c)} = U_a = \{a\}; f_3[U_c] = f_3[\{c\}] = \{a\} \subset U_{f_3(c)} \Rightarrow f_3 \text{ } continu \text{ } en \text{ } c$$

Donc f_3 est continu sur X relativement à τ_9 car il est continu en tout élément à X.

Conclusion : L'application f_3 est continue sur *X* relativement aux topologies τ_1, τ_3, τ_7 *et* τ_9. Elle est non continue sur X par rapport à $\tau_2, \tau_4, \tau_5, \tau_6$ *et* τ_8

4.3.3 CONTINUITÉ DE f_5 PAR RAPPORT AUX 9 TOPOLOGIES DÉFINIES SUR $X = \{a,b,c\}$



1) Continuité de f_5 par rapport à $\tau_1 = \{\phi, X\}$ *où* $U_a = U_b = U_c = X$

$$f_5(a) = f_5(b) = f_5(c) = a \text{ } et \text{ } U_{f_5(a)} = U_{f_5(b)} = U_{f_5(c)} = U_a = X$$

$$f_5[U_a] = f_5[U_b] = f_5[U_c] = [X] = \{a\} \subset X$$

Donc f_5 est continu en a, b et c, donc il est continu sur X relativement à τ_1.

2) Continuité de f_5 par rapport à

$$\tau_2 = \{\phi, \{a\}, X\} \text{ } où \text{ } U_a = \{a\} \text{ } et \text{ } U_b = U_c = X \quad f_5(a) = f_5(b) = f_5(c) = a \text{ } et \text{ } U_{f_5(a)} = U_{f_5(b)} = U_{f_5(c)} = U_a = \{a\}$$

$$f_5[U_a] = f_5[\{a\}] = \{a\} \subset U_{f_5(a)} \Rightarrow f_5 \text{ } continu \text{ } en \text{ } a$$

$$f_5[U_b] = f_5[X] = \{a\} \subset U_{f_5(b)} \Rightarrow f_5 \text{ } continu \text{ } en \text{ } b$$

$$f_5[U_c] = f_5[X] = \{a\} \subset U_{f_5(c)} \Rightarrow f_5 \text{ } continu \text{ } en \text{ } c$$

Donc f_5 est continu sur X relativement à τ_2 car il est continu en tout élément de X.

3) Continuité de f_5 par rapport à

$$\tau_3=\{\phi,\{a,b\},X\} \text{ où } U_a=\{a,b\}=U_b \text{ et } U_c=X \quad f_5(a)=f_5(b)=f_5(c)=a \text{ et } U_{f_5(a)}=U_{f_5(b)}=U_{f_5(c)}=U_a=\{a,b\}$$

$$f_5[U_a]=f_5[\{a,b\}]=\{a\}\subset U_{f_5(a)} \Rightarrow f_5 \text{ continu en } a$$
$$f_5[U_b]=f_5[\{a,b\}]=\{a\}\subset U_{f_5(b)} \Rightarrow f_5 \text{ continu en } b$$
$$f_5[U_c]=f_5[X]=\{a\}\subset U_{f_5(c)} \Rightarrow f_5 \text{ continu en } c$$

Donc f_5 est continu sur X relativement à τ_3 car il est continu en tout élément de X.

4) Continuité de f_5 par rapport à

$$\tau_4=\{\phi,\{a\},\{a,b\},X\} \text{ où } U_a=\{a\},U_b=\{a,b\} \text{ et } U_c=X$$

$$f_5(a)=f_5(b)=f_5(c)=a \text{ et } U_{f_5(a)}=U_{f_5(b)}=U_{f_5(c)}=\{a\}=U_a$$

$$f_5[U_a]=f_5[\{a\}]=\{a\}\subset U_{f_5(a)} \Rightarrow f_5 \text{ continu en } a$$
$$f_5[U_b]=f_5[\{a,b\}]=\{a\}\subset U_{f_5(b)} \Rightarrow f_5 \text{ continu en } b$$
$$f_5[U_c]=f_5[X]=\{a\}\subset U_{f_5(c)} \Rightarrow f_5 \text{ continu en } c$$

Donc f_5 est continu sur X relativement à τ_4 car il est continu en tout élément de X.

5) Continuité de f_5 par rapport à

$$\tau_5=\{\phi,\{a\},\{b,c\},X\} \text{ où } U_a=\{a\},U_b=U_c=\{b,c\} \quad f_5(a)=f_5(b)=f_5(c)=a \text{ et } U_{f_5(a)}=U_{f_5(b)}=U_{f_5(c)}=U_a=\{a\}$$

$$f_5[U_a]=f_5[\{a\}]=\{a\}\subset U_{f_5(a)} \Rightarrow f_5 \text{ continu en } a$$
$$f_5[U_b]=f_5[\{b,c\}]=\{a\}\subset U_{f_5(b)} \Rightarrow f_5 \text{ continu en } b$$
$$f_5[U_c]=f_5[\{b,c\}]=\{a\}\subset U_{f_5(c)} \Rightarrow f_5 \text{ continu en } c$$

Donc f_5 est continu sur X relativement à τ_5 car il est continu en tout élément de X.

6) Continuité de f_5 par rapport à

$$\tau_6=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\} \text{ où } U_a=\{a\},U_b=\{b\} \text{ et } U_c=X$$

$$f_5(a)=f_5(b)=f_5(c)=a \text{ et } U_{f_5(a)}=U_{f_5(b)}=U_{f_5(c)}=U_a=\{a\}$$

Donc f_5 est continu sur X relativement à τ_6 car il est continu en tout élément de X.

7) Continuité de f_5 par rapport à

$$\tau_7=\{\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},X\} \text{ où } U_a=\{a\}\ ,\ U_b=\{a,b\} \text{ et } U_c=\{a,c\}$$

$$f_5(a)=f_5(b)=f_5(c)=a \text{ et } U_{f_5(a)}=U_{f_5(b)}=U_{f_5(c)}=U_a=\{a\}$$

$$f_5[U_a]=f_5[\{a\}]=\{a\}=f_5[U_b]=f_5[U_c]$$
$$f_5[U_a]\subset U_{f_5(a)} \Rightarrow f_5 \text{ continu en } a$$
$$f_5[U_b]\subset U_{f_5(b)} \Rightarrow f_5 \text{ continu en } b$$
$$f_5[U_c]\subset U_{f_5(c)} \Rightarrow f_5 \text{ continu en } c$$

Donc f_5 est continu sur X relativement à τ_7 car il est continu en tout élément de X.

8) Continuité de f_5 par rapport à

$\tau_8 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, X\}$ *où* $U_a = \{a\}, U_b = \{b\}$ *et* $U_c = \{b,c\}$

$f_5(a) = f_5(b) = f_5(c) = a$ *et* $U_{f_5(a)} = U_{f_5(b)} = U_{f_5(c)} = U_a = \{a\}$

$f_5[U_a] = f_5[U_b] = f_5[U_c] = \{a\} = U_{f_5(a)} = U_{f_5(b)} = U_{f_5(c)}$

Donc f_5 est continu sur X relativement à τ_8 car il est continu en tout élément.

9) Continuité de f_5 par rapport à

$\tau_9 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$ *où* $U_a = \{a\}, U_b = \{b\}$ *et* $U_c = \{c\}$

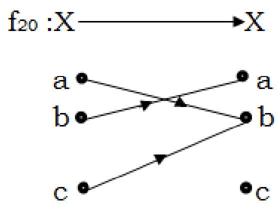
$f_5(a) = f_5(b) = f_5(c) = a$ *et* $U_{f_5(a)} = U_{f_5(b)} = U_{f_5(c)} = U_a = \{a\}$

$f_5[U_a] = f_5[U_b] = f_5[U_c] = \{a\} = U_{f_5(a)} = U_{f_5(b)} = U_{f_5(c)}$

Donc f_5 est continu sur X relativement à τ_9 car il est continu en tout élément.

Conclusion : L'application f_5 est continue sur *X* par rapport aux 9 topologies. Il en est de même des applications constantes f_6 et f_{12}.

4.3.4 CONTINUITÉ DE f_{20} RELATIVEMENT AUX 9 TOPOLOGIES DÉFINIES SUR $X = \{a,b,c\}$



1) Continuité de f_{20} relativement à

$\tau_1 = \{\phi, X\}$ *où* $U_a = U_b = U_b = X$

$f_{20}(a) = b$ *et* $U_{f_{20}(a)} = U_b = X;\ f_{20}[U_a] = f_{20}[X] = \{a,b\} \subset U_{f_{20}(a)} \Rightarrow f_{20}$ *continu en a*

$f_{20}(b) = a$ *et* $U_{f_{20}(b)} = U_a = X;\ f_{20}[U_b] = f_{20}[X] = \{a,b\} \subset U_{f_{20}(b)} \Rightarrow f_{20}$ *continu en b*

$f_{20}(c) = b$ *et* $U_{f_{20}(c)} = U_b = X;\ f_{20}[U_c] = f_{20}[X] = \{a,b\} \subset U_{f_{20}(c)} \Rightarrow f_{20}$ *continu en c*

Donc f_{20} est continu sur X relativement à τ_1 car il est continu en tout élément de X.

2) Continuité de f_{20} relativement à

$\tau_2 = \{\phi, \{a\}, X\}$ *où* $U_a = \{a\}$ *et* $U_b = U_c = X$

$f_{20}(a) = b$ *et* $U_{f_{20}(a)} = U_b = X;\ f_{20}[U_a] = f_{20}[\{a\}] = \{b\} \subset U_{f_{20}(a)} \Rightarrow f_{20}$ *continu en a*

$f_{20}(b) = a$ *et* $U_{f_{20}(b)} = U_a = \{a\};\ f_{20}[U_b] = f_{20}[X] = \{a,b\} \not\subset U_{f_{20}(b)} \Rightarrow f_{20}$ *non continu en b*

$f_{20}(c) = b$ *et* $U_{f_{20}(c)} = U_b = X;\ f_{20}[U_c] = f_{20}[X] = \{a,b\} \subset U_{f_{20}(c)} \Rightarrow f_{20}$ *continu en c*

Donc f_{20} n'est pas continu sur X relativement à τ_2 car il est non continu en b.

3) Continuité de f_{20} relativement à

$$\tau_3 = \{\phi, \{a,b\}, X\} \text{ où } U_a = U_b = \{a,b\} \text{ et } U_c = X$$

$$f_{20}(a) = b \quad et \quad U_{f_{20}(a)} = U_b = \{a,b\}; f_{20}[U_a] = f_{20}[\{a,b\}] = \{a,b\} \subset U_{f_{20}(a)} \Rightarrow f_{20} \text{ continu en } a$$

$$f_{20}(b) = a \quad et \quad U_{f_{20}(b)} = U_a = \{a,b\}; f_{20}[U_b] = f_{20}[\{a,b\}] = \{a,b\} \subset U_{f_{20}(b)} \Rightarrow f_{20} \text{ continu en } b$$

$$f_{20}(c) = b \quad et \quad U_{f_{20}(c)} = U_b = \{a,b\}; f_{20}[U_c] = f_{20}[X] = \{a,b\} \subset U_{f_{20}(c)} \Rightarrow f_{20} \text{ continu en } c$$

Donc f_{20} est continu sur X relativement à τ_3 car il est continu sur tout élément de X.

4) Continuité de f_{20} relativement à

$$\tau_4 = \{\phi, \{a\}, \{a,b\}, X\} \text{ où } U_a = \{a\}, U_b = \{a,b\} \text{ et } U_c = X$$

$$f_{20}(a) = b \quad et \quad U_{f_{20}(a)} = U_b = \{a,b\}; f_{20}[U_a] = f_{20}[\{a\}] = \{b\} \subset U_{f_{20}(a)} \Rightarrow f_{20} \text{ continu en } a$$

$$f_{20}(b) = a \quad et \quad U_{f_{20}(b)} = U_a = \{a\}; f_{20}[U_b] = f_{20}[\{a,b\}] = \{a,b\} \not\subset U_{f_{20}(b)} \Rightarrow f_{20} \text{ non continu en } b$$

$$f_{20}(c) = b \quad et \quad U_{f_{20}(c)} = U_b = \{a,b\}; f_{20}[U_c] = f_{20}[X] = \{a,b\} \subset U_{f_{20}(c)} \Rightarrow f_{20} \text{ continu en } c$$

Donc f_{20} n'est pas continue sur X relativement à τ_4 car il est non continu en b.

5) Continuité de f_{20} relativement à

$$\tau_5 = \{\phi, \{a\}, \{b,c\}, X\} \text{ où } U_a = \{a\} \quad et \quad U_b = U_c = \{b,c\}$$

$$f_{20}(a) = b \quad et \quad U_{f_{20}(a)} = U_b = \{b,c\}; f_{20}[U_a] = f_{20}[\{a\}] = \{b\} \subset U_{f_{20}(a)} \Rightarrow f_{20} \text{ continu en } a$$

$$f_{20}(b) = a \quad et \quad U_{f_{20}(b)} = U_a = \{a\}; f_{20}[U_b] = f_{20}[\{b,c\}] = \{a,b\} \not\subset U_{f_{20}(b)} \Rightarrow f_{20} \text{ non continu en } b$$

$$f_{20}(c) = b \quad et \quad U_{f_{20}(c)} = U_b = \{b,c\}; f_{20}[U_c] = f_{20}[\{b,c\}] = \{a,b\} \not\subset U_{f_{20}(c)} \Rightarrow f_{20} \text{ non continu en } c$$

Donc f_{20} n'est pas continu sur X relativement à τ_5 car il est non continu en b.

6) Continuité de f_{20} relativement à

$$\tau_6 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\} X\} \text{ où } U_a = \{a\}, U_b = \{b\} \text{ et } U_c = X$$

$$f_{20}(a) = b \quad et \quad U_{f_{20}(a)} = U_b = \{b\}; f_{20}[U_a] = f_{20}[\{a\}] = \{b\} \subset U_{f_{20}(a)} \Rightarrow f_{20} \text{ continu en } a$$

$$f_{20}(b) = a \quad et \quad U_{f_{20}(b)} = U_a = \{a\}; f_{20}[U_b] = f_{20}[\{b\}] = \{a\} \subset U_{f_{20}(b)} \Rightarrow f_{20} \text{ continu en } b$$

$$f_{20}(c) = b \quad et \quad U_{f_{20}(c)} = U_b = \{b\}; f_{20}[U_c] = f_{20}[X] = \{a,b\} \not\subset U_{f_{20}(c)} \Rightarrow f_{20} \text{ non continu en } c$$

Donc f_{20} n'est pas continu sur X relativement à τ_6 car il est non continu en c.

7) Continuité de f_{20} relativement à

$$\tau_7 = \{\phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\} X\} \text{ où } U_a = \{a\}, U_b = \{a,b\} \text{ et } U_c = \{a,c\}$$

$$f_{20}(a) = b \quad et \quad U_{f_{20}(a)} = U_b = \{a,b\}; f_{20}[U_a] = f_{20}[\{a\}] = \{b\} \subset U_{f_{20}(a)} \Rightarrow f_{20} \text{ continu en } a$$

$$f_{20}(b) = a \quad et \quad U_{f_{20}(b)} = U_a = \{a\}; f_{20}[U_b] = f_{20}[\{a,b\}] = \{a,b\} \not\subset U_{f_{20}(b)} \Rightarrow f_{20} \text{ non continu en } b$$

$$f_{20}(c) = b \quad et \quad U_{f_{20}(c)} = U_b = \{a,b\}; f_{20}[U_c] = f_{20}[\{a,c\}] = \{b\} \subset U_{f_{20}(c)} \Rightarrow f_{20} \text{ continu en } c$$

Donc f_{20} n'est pas continu sur X relativement à τ_7 car il est non continu en b.

8) Continuité de f_{20} relativement à

$\tau_8 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\} X\}$ *où* $U_a = \{a\}, U_b = \{b\}$ *et* $U_c = \{b,c\}$

$$f_{20}(a) = b \quad et \quad U_{f_{20}(a)} = U_b = \{b\};\ f_{20}[U_a] = f_{20}[\{a\}] = \{b\} \subset U_{f_{20}(a)} \Rightarrow f_{20} \textit{ continu en a}$$

$$f_{20}(b) = a \quad et \quad U_{f_{20}(b)} = U_a = \{a\};\ f_{20}[U_b] = f_{20}[\{b\}] = \{a\} \subset U_{f_{20}(b)} \Rightarrow f_{20} \textit{ continu en b}$$

$$f_{20}(c) = b \quad et \quad U_{f_{20}(c)} = U_b = \{b\};\ f_{20}[U_c] = f_{20}[\{b,c\}] = \{a,b\} \not\subset U_{f_{20}(c)} \Rightarrow f_{20} \textit{ non continu en c}$$

Donc f_{20} n'est pas continu sur X relativement à τ_8 car il est non continu en c.

9) Continuité de f_{20} relativement à

$\tau_9 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$ *où* $U_a = \{a\}, U_b = \{b\}$ *et* $U_c = \{c\}$

$$f_{20}(a) = b \quad et \quad U_{f_{20}(a)} = U_b = \{b\};\ f_{20}[U_a] = f_{20}[\{a\}] = \{b\} \subset U_{f_{20}(a)} \Rightarrow f_{20} \textit{ continu en a}$$

$$f_{20}(b) = a \quad et \quad U_{f_{20}(b)} = U_a = \{a\};\ f_{20}[U_b] = f_{20}[\{b\}] = \{a\} \subset U_{f_{20}(b)} \Rightarrow f_{20} \textit{ continu en b}$$

$$f_{20}(c) = b \quad et \quad U_{f_{20}(c)} = U_b = \{b\};\ f_{20}[U_c] = f_{20}[\{c\}] = \{b\} \subset U_{f_{20}(c)} \Rightarrow f_{20} \textit{ continu en c}$$

Donc f_{20} est continu sur X relativement à τ_9 car il est continu en tout élément de X.

Conclusion : l'application f_{20} est continue sur X relativement aux topologies τ_1, τ_3 et τ_9 . Elle n'est pas continue sur X par rapport aux topologies $\tau_2, \tau_4, \tau_5, \tau_6, \tau_7$ et τ_8 .

Il résulte de cet exercice une suite finie d'étapes réalisables pour établir la continuité d'une application définie sur un espace d'Alexandroff fini.

Ce long exercice nous permet de décrire au point 4.4 un algorithme de continuité d'une application définie sur un espace d'Alexandroff fini.

4.4 ALGORITHME DE CONTINUITÉ SUR L'ESPACE D'ALEXANDROFF FINI X

Pour établir la continuité d'une application définie sur un espace d'Alexandroff fini nous appliquerons l'algorithme suivant.

ALGORITHME

1. Début
2. Initialisation

x_0 «» $f(x_0)$ «» t_0 «» v_0 «» Ux_0 «» $f(Ux_0)$ «» $Uf(x_0)$ «» w_0 «»
x_1 «» $f(x_1)$ «» t_1 «» v_1 «» Ux_1 «» $f(Ux_1)$ «» $Uf(x_1)$ «» w_1 «»
$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$
x_n «» $f(x_n)$ «» t_m «» v_p «» Ux_n «» $f(Ux_n)$ «» $Uf(x_n)$ «» w_h «»
i 0 C «» j 0 k 0 l 0 s 0 t 0

3. Lire

$x_0, x_1, \cdots, x_n$
$f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$
$t_0, t_1, \cdots, t_m$

4. Pour i allant de 0 à n
    'Détermination de f(Ux_i)
    'Détermination de Uf(x_i)
    Si f(Ux_i) ⊂ Uf(x_i) alors
        C=C+ « »+x_i
        Ecrire (« la fonction est continue au point » ; x_i)
    Sinon
        Ecrire (« la fonction est discontinue au point » ; x_i)
    Fin si
    i=i+1

Fin pour

5. Ecrire (« la fonction est continue au(x) point(s) » ;C)
6. Fin

Détermination de f(Ux_i)

1. Début
    Pour j allant de 0 à m
        Si $x_i \in t_j$ alors
            $v_k \leftarrow t_j$
            k=k+1
        Fin si
        j=j+1
    Fin pour
    $Ux_i \leftarrow \bigcap_{k=0}^{p} v_k$

    Pour s allant de 0 à n
        Si $x_s \in Ux_i$ alors
            Si $f(x_s) \notin f(Ux_i)$ alors
                $f(Ux_i) = f(Ux_i)$+ « , »+ $f(x_s)$
            Fin si
        Fin si
        s=s+1
    Fin pour
    Fin

Détermination de Uf(x_i)

1. Début
    Pour t allant de 0 à m
        Si $f(x_i) \in T_t$ alors
            $w_l \leftarrow T_t$
            l=l+1
        Fin si
        t=t+1
    Fin pour
    $Uf(x_i) \leftarrow \bigcap_{l=0}^{m} w_l$
    Fin

ANALYSE ET DESCRIPTION DE L'ALGORITHME

Vérification de l'algorithme :

Considérons un ensemble X= {a,b,c}, une topologie τ={ ∅,{a} ,{a,b} ,X}} ainsi qu'une application définie comme suit :

f : X————→X

a.————→.a

b.————→.b

c.————→.c

Les données sont enregistrées par l'ordinateur comme suit :

x_0=a ; x_1=b ; x_2=a et n=2

$f(x_0)$=a ; $f(x_1)$=b ; $f(x_2)$=c

t_0={a} ; t_1={a,b} ; t_2=X et m=2 . L'ensemble vide n'est pas considéré par le logiciel comme faisant partie de la topologie.

i=0≤2

'Détermination de f(Ux_i)

'Détermination de Uf(x_i)

a ∈ $\{a\}$ 'f(Ux_0) ⊂ Uf(x_0)

C=" a"

Ecrire (« la fonction est continue au point » ; a)

i=0+1=1

On passe à i=1, et on répète les mêmes itérations jusqu'à i = 2

Ecrire (« la fonction est continue au(x) point(s) » ;C)

Détermination de f(Ux_i)

j= 0≤ 2 'la condition est respectée

a ∈ {a} 'on vérifie que x_i existe dans l'ouvert t_j

$v_0 \leftarrow \{a\}$ 'on insère t_j dans v_k car $x_i \in t_j$

k=0+1=1 'on incrémente k

j=0+1=1≤2

a ∈ {a,b}

$v_1 \leftarrow \{a, b\}$

k=1+1=2

j=1+1=2≤2

a ∈ {a,b,c}

$v_2 \leftarrow \{a, b, c\}$

k=2+1=3

j=2+1 'on quitte la boucle car la condition n'est plus respectée (j>2)

$Ux_0 \leftarrow \bigcap_{k=0}^{2} v_k$ donc Ux_0 ←{a}

s=0≤2

a ∈{a} ‘$x_0 \in Ux_0$

a ∉ "" ‘$f(x_0) \notin f(Ux_i)$

$f(Ux_0) =$ ", a"

s=1≤2

b ∉{a} ‘on passe directement au s suivant

s=2≤2

c ∉ {a}

s=3 ’on quitte la boucle

on obtient donc $f(Ux_0) =$ ", a" à la fin du sous-programme

Détermination de Uf(x_i)

t=0≤2

a ∈ $\{a\}$ Si $f(x_i) \in T_t$ alors

w_0 ←{a} $w_l \leftarrow T_t$

l=0+1=1

t=1≤2

a ∈ $\{a, b\}$

w_1 ←{a,b}

l=1+1=2

t=2≤2

a ∈ $\{a, b, c\}$

w_2 ←{a,b,c}

l=2+1=3

t=3 ‘on quitte la boucle

$Uf(x_0) \leftarrow \bigcap_{l=0}^{h} w_l$ et donc $Uf(x_0)$={a}

Le temps d'exécution de l'algorithme avec le langage java est de 53 secondes pour ce cas précis.

REFERENCES

[1] ALEXANDROFF P., 1937 ; Diskrete Räume, Mat ; Sbornik

[2] ARNAS F.G., 1999; Alexandroff spaces, Prepint.

[3] BOURBAKI N., 1974; Eléments de mathématiques. Livre III: Topologie générale

[4] KODA Y., 1994: The numbers of finites lattices and finite topologies. Bulletin of Institute of Combinatorics and its applications 10, 83-89.

[5] SPERT T., 2007, A Short Study of Alexandroff Spaces, Departement of Mathematics, New York University.

[6] STRONG R.E., 1960; Finite topological spaces, Trans, A.M.S. n°123, 325-340.