International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 20 No. 1 Apr. 2017, pp. 365-370

http://www.ijias.issr-journals.org/

SUR LES ESPACES TOPOLOGIQUES FINIS ET RESEAUX INFORMATIQUES

PALUKU KASOKI CLARA

Département de Mathématique Informatique, Faculté des Sciences,
Université Pédagogique Nationale (UPN), Kinshasa, RD Congo

ABSTRACT: Les espaces topologiques finis (espaces d'Alexandroff) sont actuellement utilisés en informatique théorique. L'objet de cet article est d'établir le lien entre espaces topologiques finis et réseaux informatiques, en portant des éléments de la bade irréductible de la topologie.

KEYWORDS: espace d'Alexandroff, espace topologique fini, base irréductible, digraphe.

1 INTRODUCTION

Soit τ une topologie sur l'ensemble X=$\{1,2,\dots,p,\dots,n\}$ à n éléments. Soit D(τ) $le\ digraphe\ de\ \tau$. Considérons les sommets de D(τ) $comme$ les ordinateurs.

L'interconnexion entre ordinateur p et l'ordinateur q est défini par l'arc p$\rightarrow\ -$q équivalent à l'inclusion $U_q \subset U_p$ des éléments de la base irréductible de l'espace topologique fini X.

Soit un réseau informatique orienté de n ordinateurs. Les éléments Up de la base irréductible de l'espace topologique (X,τ) où X = $\{1,2,\dots,p,\dots n\}$ sont définis par $U_p = \{p\} \cup \left\{q \in \frac{X}{\mathrm{p}} \rightarrow\ -\mathrm{q}\right\}$

Ainsi une topologie sur un ensemble fini représente un modèle d'un réseau informatique et réciproquement.

2 ESPACES D'ALEXANDROFF FINIS [1], [2] [6]

2.1 DÉFINITION : [6]

Un espace d'Alexandroff est un espace topologique dans lequel toute intersection d'une famille (fini ou infinie) d'ouverts est un ouvert.

Par symétrie ceci équivaut à dire que toute réunion (fini ou infinie) d'une famille des fermés est un fermé. Si τ est une topologie d'Alexandroff sur un ensemble X, la famille τ^* des complémentaires dans X d'éléments de τ forment une topologie sur X appelée la co-topologie de τ.

2.2 DÉFINITION

Soit (X, τ) un espace topologie où X est un ensemble non vide et $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ une topologie sur X. on dit que τ est une topologie finie sur X, ou (X, τ) est une espace topologique fini lorsque card (X)$\leq n$ où n est un nombre naturel.

Ainsi une topologie finie est une topologie d'Alexandroff car elle possède un nombre fini d'ouverts. [6]

2.3 DÉFINITION

Soit (X, τ) un espace d'Alexandroff fini. Pour tout élément p dans X, on pose $U_p = \cap \{V \subset X : V \ est\ un\ ouvert\ de\ X\ et\ p \in V\}$.

En d'autres termes U_p est le plus petit (au sens de l'inclusion ensembliste) ouvert contenant p.

La famille $\mathcal{B} = \{U_p : p \in X\}$ s'appelle base irréductible de X.

Cette famille joue un rôle capital dans les espaces d'Alexadroff. On a en effet les résultats suivants.

2.4 THÉORÈME

Soit X un espace topologique. Alors X est un espace d'Alexandroff si et seulement si $\{U_p : p \in X\}$ est une base des ouverts de x.

PREUVE

Supposons X un Alexandroff. Soit V un ouvert de X et p ∈ V

Par hypothèse U_p est un ouvert de X et il est le plus petit ouvert contenant p. D'où p ∈ $U_p \subset$ V. Ce qui montre que {U_p : p ∈ X} est une base des ouverts de X.

Réciproquement, supposons que la famille {U_p : p ∈ X} soit une base des ouverts de X. Soit {V_α : ∈ Γ } une famille quelconque d'ouverts de X. Posons V=∩{V_α : $\alpha \in$ Γ } et montrons que V est un ouvert de X.

Si V=∅, il n'y a rien à démontrer. Sinon soit p ∈ V.

Alors p ∈ V_α pour tout ∈ Γ . D'où p ∈ $U_p \subset V_\alpha$ ∀ $\alpha \in$ Γ et ainsi p ∈ $U_p \subset$ V.

Ceci montre que V est un voisinage de p. Comme p est arbitraire dans V, alors V est voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire que V est un ouvert de X.

2.5 PROPOSITION[5]

Soit (X, τ) un espace topologique fini. Il existe une base unique irréductible $\mathcal{B}$ de la topologie τ

2.6 EXEMPLE

Soit (X, τ) un espace topologique fini où X = $\{a, b, c, d\}$ et

$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, X\}$

Alors $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{a, b, c\}, \{c\}, \{c, d\}\}$ où $\{a\} = U_{a,}$

$\{a, b, c\} = U_{b,}$ $\{c\} = u_{c,}$ et $\{c, d\} = U$ est la base irreductible de (X, τ)

2.7 DÉFINITION

Soit X = $\{1,2, .. p, n\}$ un ensemble fini et τ une topologie sur X. Pour chaque p ∈ X il existe un U_p unique de la base irréductible de τ.

Nous définissons le digraphe D(τ) de l'espace topologique fini (X, τ) $par\ la\ règle\ suivante$ (p, q) est une arrête du digraphe D(τ) si et seulement si $U_q \subset U_p$. C'est-à-dire $p \rightarrow q$ si et seulement si $U_q \subset U_p$.

Le graphe G(τ) de la topologie finie τ est obtenu à partir du diagraphe D(τ) en supprimant les flèches sur les arêtes de D(τ).

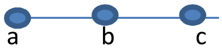
2.8 EXEMPLE

Considérons l'espace topologique (X, τ) où X=$\{a, b, c\}$ et $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$.

Les éléments de la base irréductible de τ sont $U_a = \{a\}$, $U_b = \{a, b\}$ et $U_c = \{a, c\}$.

Nous avons $U_a \subset U_b$, $U_a \subset U_c$ mais U_b *et* U_c non comparables. Le D(τ) de τ est alors

Le graphe G(τ) de τ *est*



2.9 TOPOLOGIE ENGENDRÉE PAR UN DIGRAPHE

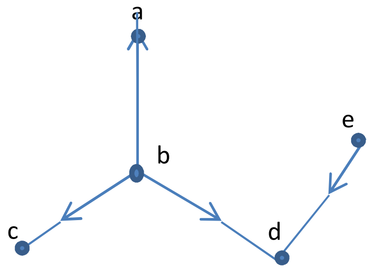
Soit (X, τ) *un espace* topologique fini. Toutes les informations sur τ sont données par D(τ) c'est-à-dire à partir du digraphe D(τ) on peut retrouver la base inductible de τ.

Voici la procédure pour trouver les $U_p = \{p\} \cup \{q \in X/(p, q) \in D(\tau)\}$

$$= \{p\} \cup \left\{q \in \frac{X}{p} \rightarrow -q\right\}$$

2.10 EXEMPLE

Soit le digraphe d'une topologie τ *donné comme ci − dessous*



On construit les U_p de τ par

$U_a = \{a\} \cup \emptyset = \{a\}$, $U_b = \{b\} \cup \{a, c, d\} = \{a, b, c, d\}$

$U_c = \{c\} \cup \emptyset = \{c\}$, $U_d = \{d\} \cup = \{d\}$ *et* $U_e = \{e\} \cup \{d\} = \{d, e\}$

Alors la topologie τ est donnée par

$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{a, c, d\}, \{a, d, e\}, \{c, d, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, c, d, e\}, X\}$

3 ESPACES TOPOLOGIQUES FINIS ET RÉSEAUX INFORMATIQUES

3.1 JONCTION ENTRE TOPOLOGIES FINIES ET TOPOLOGIES RÉSEAUX

Rappelons qu'il existe deux types de topologies réseaux : la topologie physique et la topologie logique.

La topologie physique est l'arrangement physique des équipements permettant la connexion entre deux ou plusieurs ordinateurs. Dans cette catégorie nous distinguons plusieurs topologies physiques telles que topologie en bus, topologie en anneau, topologie en étoile, topologie maillée.

La topologie logique décrit la façon dont circule l'information dans le réseau.

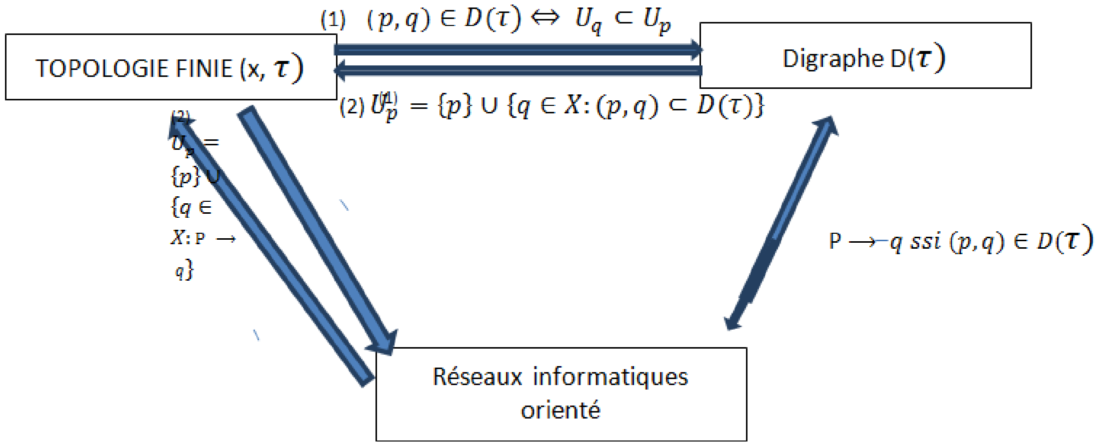
Pour décrire la jonction entre les topologies réseaux et les espaces topologiques fines on utilise les notions de digraphe D(τ) et le graphe G(τ)

Soit τ une topologie sur l'ensemble X= $\{1,2, \ldots, p, \ldots, n\}$ à n éléments. Soit D(τ) le digraphe de τ. On considère les sommets de D(τ) comme les ordinateurs dont l'interconnexion entre l'ordinateur p et l'ordinateur q est définie par la relation « p est connecté à q si et seulement si U_q est sous-ensemble de U_p ou U_p est sous ensemble de U_q.

On considère ainsi un réseau informatique dont la topologique physique est décrite par la structure du graphe G(τ) et la topologie logique par le digraphe D(τ).

Réciproquement, si un réseau informatique est donné, soit X l'ensemble des machines connectées. La topologie logique du réseau définit un digraphe engendrant une topologie sur X.

Cette corrélation est décrite dans le tableau ci-dessous.



Ainsi une topologie sur un ensemble fini X représente un modelé d'un réseau informatique.

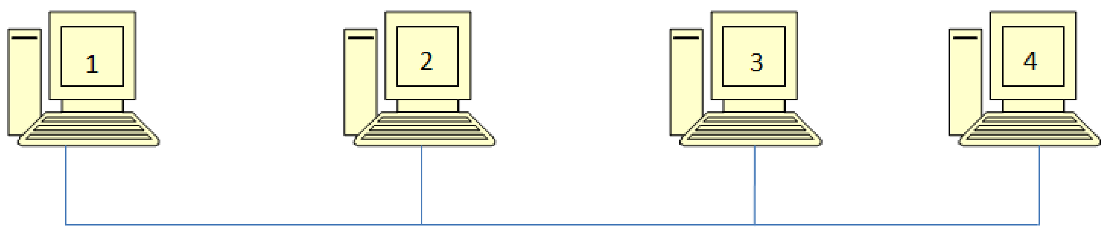
Nous illustrons cette jonction par des exemples suivants.

3.2 RÉSEAU INFORMATIQUE AYANT UNE TOPOLOGIE EN BUS

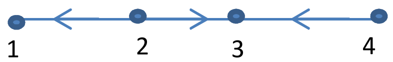
Soit un réseau informatique formé de 4 ordinateurs numérotés 1,2,3,4. Soit X l'ensemble de ces 4 ordinateurs, X = $\{1,2,3,4\}$. Définissons sur X une topologie $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, X\}$

(X, τ) est un espace topologique fini dont la base irréductible est donnée par $\mathcal{B} = \{\{1\}, \{1,2,3\}, \{3\}, \{3,4\}\}$ et son graphe est donné par le schéma suivant 

. Ce graphe décrit de réseau informatique ayant une topologie physique en bus.



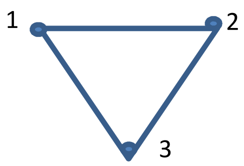
En orientant la circulation de l'information par « $p \;\rightarrow q$ ssi et seulement si $U_q \subset U_p$ » le réseau informatique admet la topologie logique ci-après.



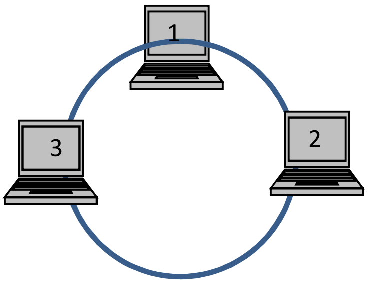
car $U_1 \subset U_2$, $U_3 \subset U_2$ et $U_3 \subset U_4$.

3.3 RÉSEAU INFORMATIQUE REPRÉSENTÉ LA TOPOLOGIE EN AMEAU

Soit un réseau informatique formé de 3 ordinateurs numérotés 1,2,3. Définitions sur X =$\{1,2,3\}$ une topologie τ =$\{\emptyset, \{1,3\}, X\}$. L'espace topoligique fini (X, τ) a pour base irréductible $\mathcal{B} = \{\{1,3\}, X\}$ et pour graphe le schéma.



Ce graphe décrit un réseau informatique à topologie en anneau



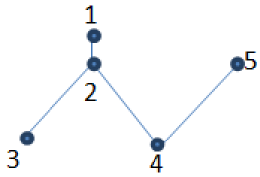
En orientant la circulation de l'information dans ce réseau par « $p \rightarrow q$ si et seulement si $U_p \subset U_q$", on obtient un réseau en anneau modélisé par

3.4 RÉSEAU INFORMATIQUE REPRÉSENTÉ À TOPOLOGIE EN ÉTOILE

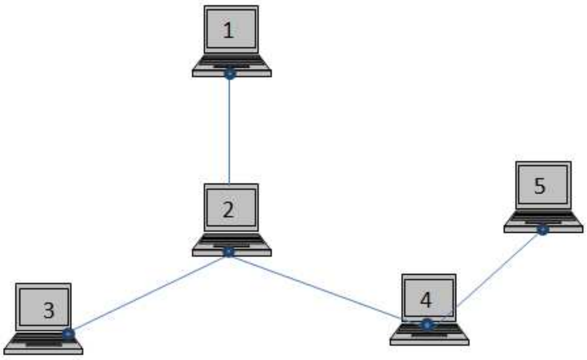
Soit X = $\{1,2,3,4,5\}$, un ensemble de 5 ordinateurs sur lequel on définit la topologie.

$$\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{4\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{4,5\}, \{1,3,4\}, \{1,4,5\}, \{3,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{1,2,3,4\} X\}$$

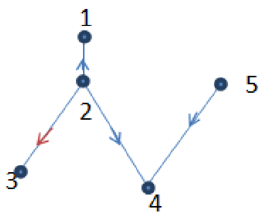
Cette topologie a pour base irréductible$\mathcal{B} = \big\{\{1\}, \{1,2,3,4\}, \{3\}, \{4\}, \{4,5\}\big\}$ et pour graphe le schéma suivant.



Ce graphe décrit un réseau informatique à topologie en étoile

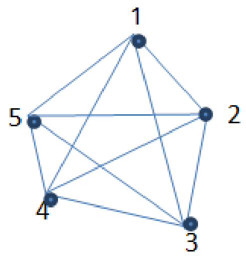


En orientant la circulation de l'information dans ce réseau par "$p \rightarrow q$ si et seulement si $U_q \subset U_p$" on obtient un réseau en étoile modélisé par

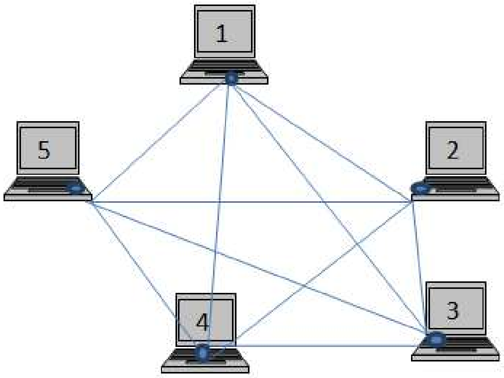


3.5 RÉSEAU INFORMATIQUE REPRÉSENTÉ À TOPOLOGIE MAILLÉE

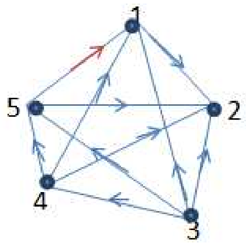
Soit X $=\{1,2,3,4,5\}$, un ensemble de 5 ordinateurs sur lequel on définit la topologie τ dont la base irréductible est donnée par $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{2\},\{1,2,3,4,5\},\{1,2,4,5\},\{1,2,5\}\}$ cet espace topologique (X, τ) a pour graphe le schéma.



Ce graphe décrit un réseau informatique à topologie maillée



En orientant la circulation de l'information dans ce réseau par "$p \to q$ si et seulement si $U_q \subset U_p$ on obtient un réseau en anneau modélisé par



REFERENCES

[1] ALEXANDROFF P., 1937, Diskrete Räume, Mat. Sbornik

[2] ARENAS F.G., 1999; Alexandroff spaces, Prepint

[3] DORTH M., 1999; Introduction aux réseaux locaux, edition Duméd, Paris

[4] KHALIMSKY E., 1987 ; Topological structures in computer science, J. of Apphied Maths. and simulation 1:25-40

[5] STRONG R.E 1966; Finite topogical spaces, Trans. A.M.S. n°123, 325-340

[6] SPEER T., 2007; A Short Study of Alexandroff Spaces, Departement of Mathematics, New York University.