International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 18 No. 1 Oct. 2016, pp. 166-190
© 2016 Innovative Space of Scientific Research Journals
http://www.ijias.issr-journals.org/

APERÇU GENERAL SUR LES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES NON LINEAIRES

[OVERVIEW ON NON-LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS]

Théodore Mapendo Wendo

Département de Mathématique-physique,
Institut Supérieur Pédagogique d'Idjwi (ISP-IDJWI),
Idjwi, Sud-Kivu, RD Congo

ABSTRACT: The mathematical notion of nonlinear partial derivatives equations are registered in full in Mathematical Analysis. This concept has several applications in other disciplines such as physics, economics, demography, chemistry, differential geometry and infinitesimal, etc. Presented with diversified forms, this notion remains essential in the progress of all research in pure and applied mathematics. It borrows concepts of topology and functional analysis for a better understanding. The question is at what level mathematics are for research and our contribution in this article. For this, we present the theory and develop some methods of solving equations to nonlinear partial differential equations.

KEYWORDS: metric space, topological space, normed vector space, space of SOBOLEV, equation of KORTEWEG and VRIES, REACTION-RELEASE equation, Navier-Stokes equation.

RESUME: La notion mathématique d'équations aux dérivées partielles non linéaires s'inscrit en intégralité en Analyse mathématique. Cette notion trouve plusieurs applications dans d'autres disciplines comme la physique, l'économie, la démographie, la chimie, la géométrie différentielle et infinitésimale, etc. Présentée avec des formes diversifiées, cette notion reste incontournable dans le progrès de toute recherche en mathématique pure ou appliquée. Elle emprunte des notions de topologie et d'analyse fonctionnelle pour une meilleure compréhension. La question est de savoir à quel niveau les matheux en sont pour la recherche et notre apport dans le présent article. Pour cela, nous présentons la théorie et développons quelques méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires.

MOTS-CLEFS: Espace métrique, espace topologique, espace vectoriel normé, espace de SOBOLEV, équation de KORTEWEG et de VRIES, équation de REACTION-DIFFUSION, équation de NAVIER-STOKES.

1 INTRO0DUCTION

1.1 NOTE LIMINAIRE

Des notions d'équations différentielles apparaissent dans différentes branches des mathématiques comme nous le présentons dans cet article. Nous supposons que nos lecteurs ont un baguage suffisant en cette matière et notre propos n'en est pas un exposé exhaustif ; plutôt un éclaircissement intelligentiel tenant compte de notre niveau de culture en mathématique. Les notions de topologie et d'espaces fonctionnels sont présentées dans ce travail du faite que les solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires sont des fonctions définies dans un espace fonctionnel qui n'est rien d'autre qu'un ensemble d'application d'une certaine forme d'un ouvert A vers un ouvert B. Les équations aux dérivées partielles non linéaires sont présentées sans tenir compte de leurs applications.

1.2 GENERALITES

1.2.1 QUELQUES NOTIONS DE TOPOLOGIE ET D'ANALYSE FONCTIONNELLE

La topologie est la partie des mathématiques qui étudie les notions, à priori intuitives, de continuité et de limite. L'analyse fonctionnelle quant à elle, étudie la nature et les propriétés des fonctions.

1.2.1.1 ESPACE MÉTRIQUE

Soit **E** un ensemble non-vide.

- Une distance entre deux éléments de **E** est toute application

$$d: \quad E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$(x, y) \longrightarrow d(x, y)$$

Vérifiant les conditions suivantes :

(1) $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$: Axiome de séparation

(2) $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$: Symétrique

(3) $\forall x, y, z \in E, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$: Inégalité triangulaire

- Un espace métrique est tout ensemble non vide **E** dont on a défini une distance d entre deux éléments. On le note par (**E**, d) et ses éléments sont appelés des points.

Exemples

1. $\mathbf{E} = \mathbb{R}$ est un espace métrique pour

$$d_1(x, y) = |x - y| \; et \; d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|}$$

2. $\mathbf{E} = \mathbb{R}^n (n \geq 2)$: est espace métrique pour

$$d_1(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$d_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

et

$$d_3(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}$$

3. L'ensemble $\mathfrak{B}(\mathbb{A}, \mathbb{R})$, des fonctions numériques réelles bornées sur $\mathbb{A}$**,** est un espace métrique pour la distance

$$d(f, g) = sup_{x \in \mathbb{A}} \{|g(x) - f(x)|\}$$

4. L'ensemble $\mathcal{K}(\Delta, \mathbb{R})$, des fonctions numériques réelles continues sur l'intervalle fermé et borné $\Delta = [a, b]$, est un espace métrique pour les distances :

$d_1(f, g) = sup_{x \in \mathbb{A}} \{|g(x) - f(x)|\}$: distance de la convergence uniforme

$d_2(f, g) = \int_{\Delta} \{|g(x) - f(x)|\} \, dx$: distance de la convergence moyenne

$d_3(f, g) = \sqrt{\int_{\Delta} |g(x) - f(x)|^2 \, dx}$: distance de la convergence en moyenne quadratique.

Remarques

- On dit qu'une suite (x_n) d'un espace métrique X converge ou est convergente s'il existe un point $x \in X$ vérifiant :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n, et\ n \geq N \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

- On dit qu'une suite (x_n) d'un espace métrique X est une suite de CAUCHY si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \frac{\mathbb{N}}{\forall n}, m \in \mathbb{N}, n \geq N\ et\ m \geq N \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

1.2.1.2 ESPACE TOPOLOGIQUE

DÉFINITION

La structure d'espace topologique peut se définir de deux manières équivalentes suivantes :

1. Soit **E** un ensemble non vide. On dit qu'on a défini une structure topologique sur **E** si l'on a défini un ensemble £ des parties de **E** (ce qu'on appelle ouvert de **E**) vérifiant les conditions suivantes :
   (1) **E** et ϕ appartiennent à £ ;
   (2) Toute réunion (finie ou infinie) d'éléments de £ est un élément de £ ;
   (3) Toute intersection d'éléments de £ est un élément de £.
2. Soit **E** un ensemble non vide. On dit qu'on a défini une structure topologique sur **E**, si à chaque point a de **E**, on associe un ensemble **V**(a) des parties de **E** (qu'on appelle voisinage de a) vérifiant les conditions suivantes :
   (1) Tout voisinage de a contient a ;
   (2) Toute intersection finie des voisinages de a est un voisinage de a
   (3) Toute partie de **E** contenant un voisinage de a est un voisinage de a
   (4) Si **V** est un voisinage de a, alors V contient un voisinage $\mathbf{V_1}$ de a tel que **V** soit un voisinage de tout point de $\mathbf{V_1}$

Remarques

- Le passage de l'une de ces définitions à l'autre se fait par l'intermédiaire des définitions suivantes :
  (1) Si les ouverts sont donnés, on appelle voisinage d'un point a, toute partie de **E** contenant un ouvert contenant a
  (2) Si les voisinages sont donnés, on appelle ouvert de **E**, toute partie de **E** qui est voisinage de chacun de ses points. Dans ce cas, le couple (**E**, £) et (**E**, **V**(x)) sont appelés espaces topologiques.
- Soient **E** un espace topologique. **O** un ouvert de **E** et **A** une partie non vide de **E**.
  (1) On appelle trace de **O** sur **A**, l'intersection **O** ∩ **A** ;
  (2) La topologie induite sur **A** par la topologie de **E** est structure topologique dont les ouverts sont les traces sur **A** des ouverts de **E**. L'ensemble A, muni de cette structure, est appelé sous-espace topologique de **E**.

AUTRES NOTIONS

Soient (**E**, £) un espace topologique et A une partie non vide de E.

- On appelle intérieur de **A**, l'ensemble noté $intA$ et défini par la réunion des ouverts contenus dans **A**, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{int}\mathbf{A} = \bigcup_{\substack{\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{A} \\ \boldsymbol{\Omega} \in £}} \boldsymbol{\Omega}$$

- On appelle ensemble fermé d'un espace topologique, le complémentaire d'un ouvert ; c'est-à-dire un ensemble **F** est dit fermé si et seulement si :

$$\mathbf{F} = \complement_E^A$$

- On appelle fermeture de **A**, l'ensemble noté $\overline{\mathbf{A}}$ et défini par l'intersection de tous les fermés contenant **A** ; c'est-à-dire,

$$\overline{\mathbf{A}} = \bigcap_{\substack{\mathbf{F} \supset \mathbf{A} \\ \mathbf{F} \in \mathcal{F}}} \mathbf{F}$$

Où $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des fermés de **E**.

- On dit que **A** est une partie dense dans **E** si et seulement si :

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{E}$$

- On appelle frontière de **A**, l'ensemble noté et défini par :

$$\boldsymbol{\partial}\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} \setminus \mathbf{A}$$

- On dit que x est un point frontière de **A** si et seulement si **V** de x contient un point de A et un point complémentaire de **A**.
- Axiome de HAUSDORFF (HAUSDAFF) : Quels que soient les éléments distincts a et b d'un espace topologique **E**, il existe un voisinage **H** de a et un voisinage **V** de b sans point commun ($\mathbf{H} \cap \mathbf{V} = \emptyset$).
- On dit qu'un espace topologique est séparé s'il vérifie l'axiome de HAUSDORFF.
- On dit qu'un espace topologique est séparable s'il existe une partie dénombrable **B** de **E**, dense dans **E**.
- **A** est un ensemble frontière si son complémentaire est dense dans **E** :

$$\overline{\mathbf{E} \setminus \mathbf{A}} = \mathbf{E}$$

- On dit qu'un espace topologique est convexe s'il n'est pas réunion de deux ensembles ouverts non vides disjoints.
- On dit que **A** est un ensemble convexe si le sous-espace **A** de **E** est convexe

1.2.1.3 ESPACE VECTORIEL NORMÉ

DÉFINITION

Soit **E** un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ des nombres réels ou complexes.

E est dit normé si l'on a défini, sur **E**, une application à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ qui, à tout vecteur x de **E**, associe un nombre réel positif noté $\|x\|$ et appelé norme de x, ayant les propriétés suivantes :

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbf{E}, \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(3) $\forall x, y \in \mathbf{E}, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$: Inégalité triangulaire

EXEMPLES

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur lui-même. Il est normé par l'application

$$\|\cdot\| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \to \|x\| = |x|$$

2. L'ensemble $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Il est normé par les applications :

$$N_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \to N_1(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad x_i = x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$N_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \to N_2(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$N_3 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \to N_3(x) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$$

3. L'application « module » est une norme sur $\mathbb{C}$

$$|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+ : z \longrightarrow |z|$$

CONSÉQUENCES

1. $\forall x, y \in E, |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$
2. Un espace vectoriel normé **E** a une structure naturelle d'espace métrique. Il suffit de définir la distance entre deux vecteurs x et y par :

$$d : \quad E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$(x, y) \longrightarrow d(x, y) = \|x - y\|$$

En effet, $\forall x, y, z \in \mathbf{E}$, on a :

(1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) $d(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = \|y - x\| = d(y, x)$

(3) $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - y\| + \|z - y\|$

3. La distance $d(x, y) = \|x - y\|$ vérifie les conditions suivantes :

(1) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$: Invariance par translation

(2) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot d(x, y)$

PROPOSITION

Si $\{\boldsymbol{x_n}\}$ et $\{\boldsymbol{y_n}\}$ sont deux suites d'éléments d'un espace vectoriel normé **E** convergent respectivement vers x et y et, λ et θ sont des nombres réels, alors :

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda x_n + \theta y_n) = \lambda x + \theta y$$

REMARQUES

- On dit qu'espace vectoriel **E** est convexe si, lorsqu'il contient deux points x et y, alors il contient le segment d'extrémité x et y. Autrement dit :

E est convexe $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbf{E}, \exists \lambda \in [0,1] / \lambda x + (1 - \lambda) \in \mathbf{E}$

- Un espace vectoriel normé, complet pour la distance d associée à sa norme, est un espace de BANACH.
- On appelle espace vectoriel euclidien ou espace préhilbertien, tout espace vectoriel sur lequel est défini un produit scalaire.

- Un espace de HILBERT est un espace de BANACH dont la norme est définie à partir d'un produit scalaire.

1.2.1.4 ESPACE DE SOBOLEV $\mathbf{W}^{\mathbf{m},\mathbf{p}}(\boldsymbol{\Omega})$

DÉFINITION

a) Nous supposons connue la définition des applications mesurables par la mesure de LEBESGUE et la définition de $\mathbf{L}^{\mathbf{1}}(\boldsymbol{\Omega})$**,** espace des fonctions sommables sur Ω, muni de la norme définie par :

$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f(\Omega)| dx$$

On les appelle espace $\mathrm{L}^{\mathrm{P}}(\Omega)$ ou encore les fonctions de puissance p-ième sommable sur Ω, l'espace défini par :

$$\mathrm{L}^{\mathrm{P}}(\Omega, \mathbb{C}) = \{\text{u mesurable sur } \Omega, \text{à valeur dans } \mathbb{C} \text{ tel que } |\mathrm{u}|^{\mathrm{p}} \in \mathrm{L}^1\}$$

b) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de SOBOLEV, noté $\mathrm{W}^{\mathrm{m,p}}(\Omega)$, est un espace fonctionnel constitué des fonctions de $\mathrm{L}^{\mathrm{P}}(\Omega)$ dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre m, au sens des distributions, s'identifient à des fonctions de $\mathrm{L}^{\mathrm{P}}(\Omega)$

THÉORÈME D'INJECTION

On suppose $p \geq 1$ et $m \in \mathbb{N}$.

(1) Si $n > m \cdot p$ pour tout q tel que $p \leq q \leq \frac{np}{(n-m)}$, alors on a la propriété :

$$\mathrm{W}^{\mathrm{m,p}}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^{\mathrm{q}}(\mathbb{R}^n)$$

(2) Pour $p = 1$, on a : $\mathrm{W}^{\mathrm{m},1}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{C_b}(\mathbb{R}^n)$

(3) Si $n = m \cdot p$ et $p > 1$, alors $\forall q / p \leq q \leq \infty$, on a la propriété

$$\mathrm{W}^{\mathrm{m,p}}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^{\mathrm{q}}(\mathbb{R}^n)$$

(4) Si $p > 1$, alors $0 < \lambda \leq 1 - \frac{n}{p} \Rightarrow \mathrm{W}^{1,\mathrm{p}}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathrm{C}_{\mathrm{b}}^{0,\lambda}(\mathbb{R}^n)$

(5) Si $mp > n$ lorsque $\frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$ et si j est tel que $(j-1)p < n < jp$, alors :

- $0 < \lambda \leq j - \frac{n}{p} \Rightarrow \mathrm{W}^{\mathrm{m,p}}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathrm{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{m-j},\lambda}(\mathbb{R}^n)$
- Si $\frac{n}{p} \in \mathbb{N}$ et $m \geq j = \frac{n}{p} + 1$ alors $\mathrm{W}^{\mathrm{m,p}}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathrm{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{m}-\frac{n}{p-1},\lambda}(\mathbb{R}^n); \forall\lambda < 1$

REMARQUES

- ❖ Les espaces des SOBOLEV fournissent un cadre fonctionnel convenable pour la plupart des problèmes aux limites elliptiques de la physique.
- ❖ Le théorème d'injection présente l'importance convenable sur l'appartenance des éléments de $\mathrm{W}^{\mathrm{m,p}}(\Omega)$ à des espaces $\mathrm{L}^{\mathrm{q}}(\Omega)$, avec $p > q$.
- ❖ Soit **X** un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ et $\mathbf{X}^*$ son dual (c'est-à-dire l'espace de formes linéaire sur **X**). Soient p et q deux entiers positifs ou nuls. On appelle tenseur p fois covariant et q fois contravariant ou tenseur d'espace $\binom{p}{q}$, toute application $(p+q)$ linéaire de :

$$(\mathbf{X}^*)^{\mathbf{p}} \times \mathbf{X}^{\mathbf{q}} = \underbrace{\mathbf{X}^* \times \ldots \times \mathbf{X}^*}_{P\ facteurs} \times \underbrace{\mathbf{X} \times \ldots \times \mathbf{X}}_{q\ facteurs}$$

dans le corps $\mathbb{K}$

1.3 UN MOT SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1.3.1 DÉFINITIONS

DÉFINITION 1

Une équation différentielle est une équation qui comporte des dérivées.

EXEMPLES

1. $\frac{dy}{dx} = x + 5$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$
3. $xy' + y = 3$
4. $y''' + 2(y'')^2 + y' = cosx$
5. $(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$
6. $\frac{\partial Z}{\partial x} = Z + x\frac{\partial Z}{\partial y}$

7. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y$

DÉFINITION 2

On parle de l'équation différentielle ordinaire lorsque les dérivées s'entendent par rapport à une seule variable indépendante s'il y en a. C'est le cas des exemples de 1 jusqu'à 5 ci-dessus.

DÉFINITION 3

Une équation différentielle sera dite aux dérivées partielles s'il y a deux variables indépendantes ou plus et les dérivées sont dites dérivées partielles. C'est le cas des exemples 6. et 7. ci-dessus.

DÉFINITION 4

1°) L'ordre d'une équation différentielle est celui de la dérivée dont l'ordre est le plus élevé qui y figure. Les équations 1, 3 et 6 ci-dessus sont du premier ordre.

2°) Le degré d'une équation différentielle, si celle-ci peut être écrite comme un polynôme où les indéterminées sont les dérivées, est le degré de la dérivée dont l'ordre est du deuxième degré.

1.3.2 RÉSOLUTION

1°) On appelle solution ou intégrale d'une équation différentielle, toute fonction vérifiant cette équation.

2°) On appelle solution générale ou intégrale générale d'une équation différentielle, toute fonction $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dépendant des variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ et d'une ou plusieurs constantes lorsque l'équation est du premier ou du n[è] degré.

3°) On appelle solution particulière d'une équation différentielle, toute équation déduite de la solution générale suivant certaines conditions.

4°) Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer sa solution générale ou particulière selon que les conditions initiales et/ou conditions aux limites ne sont pas données ou sont données.

2 EQUATIONS NON LINEAIRES

2.1 NOTIONS

DÉFINITION 1

Les notions telles que $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ et $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ sont appelées notations de MONGE.

EXEMPLE

Les équations $x\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z \; et \; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ deviennent simultanément $xp + yq = z$ et $r + 3s + t = 0$

DÉFINITION 2

1°) Les équations aux dérivées partielles sont dites linéaires lorsqu'elles sont du premier degré en p et q.

EXEMPLES

1) $px + qy = 3z$

2) $px^2 + qy = z^3$

2°) Si non, elles sont dites non linéaires

EXEMPLES

1) $p^2 + q^2 = 1$
2) $p + lnq = 3z^3$

2.1.1 RÉSOLUTIONS

SOLUTIONS COMPLÈTES ET SINGULIÈRES

Soit l'équation aux dérivées partielles non linéaires, d'ordre un :

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \qquad (2.1)$$

tirée de

$$g(x, y, z, a, b) = 0 \qquad (2.2)$$

En éliminant les constantes arbitraires a et b. On dit alors que (2.2) est la (ou une) solution complète de (2.1).

Cette solution complète représente une famille de surfaces à deux paramètres qui peut avoir ou ne pas avoir d'enveloppe. Pour trouver celle-ci, si elle existe, on élimine a et b entre :

$$g = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial b} = 0$$

- Si l'équation obtenue par l'élimination

$$\lambda(x, y, z) = 0 \qquad (2.3)$$

vérifie (2.1), alors on l'appelle solution singulière de (2.1).

- Si $\lambda\xi(x, y, z) \cdot \eta(x, y, z)$ et si $\xi = 0$ vérifie (2.1) $\eta = 0$ ne vérifie pas (2.1), amors $\xi = 0$ est la solution singulière.

Comme dans le cas des équations différentielles ordinaires la solution singulière peut s'obtenir à partir de l'équation aux dérivées partielles en éliminant p et q entre :

$$q = 0, \frac{\partial f}{\partial p} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial q} = 0$$

EXEMPLE 1

$z = px + qy - (p^2 + q^2)$ possède, comme solution complète, $z = ax + by - (a^2 + b^2)$

Posons $g(x, y, z) = z - ax - by + a^2 + b^2$, alors

$$\begin{cases} g(x, y, z, a, b) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial b} = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} z - ax - by + a^2 + b^2 = 0 \\ -x + 2a = 0 \\ -y + 2b = 0 \end{cases}$$

En éliminant a et b entre ces équations, on a :

$$z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$$

Cette solution vérifie l'équation différentielle et c'est la solution singulière.

La solution complète représente une famille de plans à deux paramètres, qui enveloppe le paraboloïde $x^2 + y^2 = 4z$.

SOLUTION GÉNÉRALE

Si, dans la solution complète (2.2), l'une des constantes, soit b, est remplacée par une fonction connue de l'autre constante, soit $b = \emptyset(a)$, alors $g(x, y, z, a, \emptyset(a)\ ) = 0$ est une famille de surfaces de (2.1) à un paramètre. Si entre famille de surfaces a une enveloppe, son équation peut se trouver comme d'habitude en éliminant a entre $g(x, y, z, a, \emptyset(a)) = 0$ et $g(x, y, z, a, \emptyset(a)) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial a} g(x, y, z, a, \emptyset(a)) = 0$ et en déterminant lequel facteur du résultat qui vérifie (2.1)

EXEMPLE 2

On pose $b = \emptyset(a) = a$ dans la solution complète de l'exemple 1. Alors g devient $g(x, y, z, a) = z - a(x + y) + 2a^2$ et le résultat de l'élimination est $z = \frac{1}{8}(x + y)^2$.

On vérifie aisément que cette fonction satisfait l'équation différentielle de l'exemple 1. Il s'agit d'un cylindre parabolique dont les génératrices sont parallèles au plan XOY.

En considérant $\emptyset(a)$ comme variant arbitrairement, on a ce qu'on appelle solution générale de l'équation différentielle.

Ainsi, dans l'exemple 2, $8z = (x + y)^2$ fait partie de la solution générale de l'équation différentielle de l'exemple 1.

Lorsque $b = \emptyset(a)$, $\emptyset$ étant arbitraire, est utilisé, l'élimination de a entre $g = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial a} = 0$ n'est pas possible ; on ne peut donc exprimer la solution générale par une seule équation comportant une fonction arbitraire, comme dans le cas de l'équation linéaire.

MÉTHODES GÉNÉRALES

Avant d'étudier la méthode générale de résolution de (2.1), nous donnerons des procédés spéciaux pour résoudre quatre types d'équations.

- **Quatre types particuliers**

Type 1 : $f(p, q) = 0$

La solution complète de cette équation est :

$$z = ax + h(a)y + c \qquad (2.4)$$

Où $f(p, q) = 0$ *et* a et c sont des constante arbitraires.

Les équations nécessaires pour déterminer la solution singulière sont :

$$z = ax + h'(a)y + c, 0 = x + h'(a)y, a = 1$$

Il n'y a pas de solution singulière. La solution générale est obtenue en posant $c = \emptyset(a)$, $\emptyset$ étant arbitraire, et en éliminant a entre

$$z = ax + h(a)y + \emptyset(a) \qquad (2.5)$$

et $ax + h'(a)y + \emptyset'(a) = 0$. L'équation (2.5) pour une fonction donnée $\emptyset(a)$ représente une famille de plans à un paramètre et son enveloppe est une surface développée.

Exemple 3 : Résoudre $p^2 + q^2 = 1$.

$p^2 + q^2 = 1$

$\Leftrightarrow p^2 + q^2 - 1 = 0 : f(p, q) = p^2 + q^2 - 1$ et

$h[a, h(a)] = 0 \Longrightarrow a^2 + [h(a)]^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow h(a) = (a^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$

Une solution complète est $z = ax + (a^2 - 1)^{\frac{1}{2}}y + C$. En posant :

$$a = sec\alpha, h(a) = tg\alpha \text{ et } z = xsec\alpha + ytg\alpha + C.$$

Si on pose $C = \emptyset(a) = 0$, alors le résultat de l'élimination de α entre

$z = xsec\alpha + ytg\alpha, 0 = xtg\alpha + ysec\alpha \; ou \; 0 = xsin\alpha + y \; est \; z^2 = x^2 - y^2$.

Cette surface développable (cône) fait partie de la solution générale de l'équation différentielle donnée. Remarquer qu'on aurait pu prendre $h(a) = (a^2-1)^{\frac{1}{2}}y$ et obtenir comme solution complète $z = ax - (a^2-1)y + C$

<u>Type 2</u> : $z = px + qy + f(p,q)$

La solution complète de cette équation est : $z = ax + by + f(a,b)$. Cette équation est connue sous le nom d'équation de CLAIRAUT généralisée. Cette solution complète représente de plans à deux paramètres. La solution singulière, si elle existe, est une surface ayant la famille de plans de la solution complète comme plans tangents.

Exemple 4 : Résoudre $z = px + qy + 3p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}$

Une solution complète est $z = px + qy + 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$. Cherchons la solution singulière :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \cdot \dfrac{1}{3} a^{\frac{1}{3}-1} b^{\frac{1}{3}} = 0 \\ y + 3 \cdot \dfrac{1}{3} a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + a^{\frac{-2}{3}} b^{\frac{1}{3}} = 0 \\ x + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{-2}{3}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a^{\frac{-2}{3}} b^{\frac{1}{3}} \\ x = -a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{-2}{3}} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} ax + by &= a. -a^{\frac{-2}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b. -a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{-2}{3}} = -a^{\frac{-2}{3}+1}b^{\frac{1}{3}} — a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{-2}{3}+1} \\ &= -a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} = -2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} \\ x \cdot y &= -a^{\frac{-2}{3}}b^{\frac{1}{3}} \cdot -a^{\frac{+1}{3}} \cdot b^{\frac{-2}{3}} = -a^{\frac{-2}{3}+\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}} = -a^{\frac{-1}{3}}b^{\frac{-1}{3}} \end{aligned}$$

En substituant dans la solution complète, on obtient :

$$\begin{aligned} z &= -2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{a^{\frac{-1}{3}}b^{\frac{-1}{3}}} = \frac{1}{xy} \Leftrightarrow xyz = 1 \end{aligned}$$

<u>Type 3</u> : $f(x,p,q) = 0$

Posons $z = F(x+ay) = F(u)$ où a est une constante arbitraire.

Alors $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dz}{du}$ et q $= \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = a\frac{dz}{du}$

Lorsque ces valeurs sont reportées dans l'équation différentielle donnée, on obtient une équation différentielle ordinaire d'ordre 1, $f\left(z, \frac{dz}{du}, a\frac{dz}{du}\right) = 0$ dont la solution est la solution complète cherchée.

Exemple 5 : Résoudre $z = p^2 + q^2$

Posons $z = F(x+ay) = F(u)$. Alors $p = \frac{dz}{du}, q = a\left(\frac{dz}{du}\right)^2$ et l'équation différentielle donnée se ramène à $z = \left(\frac{dz}{du}\right)^2 + a^2\left(\frac{dz}{du}\right)^2$.

En résolvant $\frac{dz}{du} = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1-a^2}}$ ou $\frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}du$, on obtient : $2\sqrt{z} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}u + k$.

En posant $k = b$, on trouve : $2\sqrt{z} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}u + b$.

Ainsi une solution complète est $4(1+a^2)z = (x+ay+b)^2$, famille de cylindres paraboliques.

En prenant les dérivées par rapport à a et b, on a $8az - 2(x+ay+b)y = 0$,

$x + ay + b = 0$. La solution singulière est $z = 0$.

<u>Type 4</u> : $f_1(x,p) = f_2(y,q)$

Posons $f_1(x,p) = a$, $f_2(y,q) = a$ où a est une constante arbitraire et résolvons pour obtenir $p = F_1(x,p) \; et \; q = F_2(y,q)$.

Puisque z est une fonction de $x \; et \; y$, $dz = pdx + qdy = F_1(x,a)dx + F_2(y,a)dx$.

$$z = \int F_1(x,a)dx + \int F_2(y,a)dx \qquad (2.6)$$

contenant deux constantes arbitraires, est la solution cherchée.

Exemple 6 : Résoudre $p - x^2 = q - y^2$

En posant $p - x^2 = a \; et \; q - y^2 = a$, on obtient $p = a + x^2, q = a + y^2$

En intégrant on a :

$$\int dz = \int pdx + qdy$$
$$\Leftrightarrow z = \int (a + x^2)dx + \int (a + y^2)dy$$
$$\Leftrightarrow z = ax + \frac{x^3}{3} + ay - \frac{y^3}{3} + b$$

Il n'y a pas de solution singulière.

Remarque : Transformations

Comme dans le cas d'équations différentielles ordinaires, il est quelque fois possible de trouver un changement de variable qui ramène l'équation donnée à une équation de l'un de quatre types précédents.

La combinaison px, par exemple, suggère la transformation $X = lnx$, puisqu'alors

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial X}\frac{dX}{dx} = \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} \; et \; px = \frac{\partial z}{\partial X}$$

Ainsi $q = px + p^2x^2$ devient $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial X} + \left(\frac{\partial z}{\partial X}\right)^2$, équation du type 1. De même, la combinaison qy suggère la transformation $Z = lnz$, puisqu'alors

$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dX}\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} \; et \, \frac{p}{z} = \frac{\partial z}{\partial x}$, de même que $\frac{q}{z} = \frac{\partial z}{\partial x}$.

Ainsi $\frac{q}{z} = \left(\frac{q}{z}\right)^2$ devient $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$, de type 1.

- **Méthode de CHARPIT**

Considérons l'équation aux dérivées partielles (2.1) : $f(x, y, z, p, q) = 0$.

Puisque z est une fonction de x et y, on a :

$$dz = pdx + qdy \qquad (2.7)$$

Posons $p = u(x, y, z, a)$ où a est une constante arbitraire. Substituons dans (2.1) et résolvons pour obtenir $q = v(x, y, z, a.)$.

Pour ces expressions de p et q, (2.7) devient :

$$dz = udx + vdy \qquad (2.8)$$

Si on peut intégrer (2.8) et que l'on puisse obtenir :

$$g(x, y, z, a, b = 0) \qquad (2.9)$$

alors c'est la solution complète de (2.1)

Exemple 7 : Résoudre $pq + qx = y$

On prend $p = a - x$, on reporte dans $pq + qx = y$ et on résout par rapport $q = \frac{y}{a}$. En reportant dans $dz = pdx + qdy$, on a $dz = (a - z)dx + (\frac{y}{a})dy$, équation intégrale dont la solution $z = ax - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\frac{y^2}{a} + k$ ou $2az = 2a^2x^2 - ax^2 + y^2 + b$, avec $b = k$

Puisque la réussite de ce procédé dépend du bon choix de l'expression de p, on ne peut le donner comme procédé systématique.

- **Méthode générale**

Elle consiste à trouver une équation

$$F(x,y,z,p,q)=0 \qquad (2.10)$$

telle que le système formé par les équations (2.1) et (2.10) ait pour solution

$p=P(x,y,z)$ et $q=Q(x,y,z)$; c'est-à-dire :

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial q}\\ \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q}\end{vmatrix}\neq 0 \qquad (2.11)$$

identiquement et celle que, pour ces expressions de p et q, l'équation aux dérivées partielles (2.8) c'est-à-dire $dz=pdx+qdy=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy$ soit intégrable ; c'est-à-dire $P\frac{\partial Q}{\partial z}-Q\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}=0$

En dérivant (2.1) et (2.10) partiellement par rapport à x et y, on trouve :

$$\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0 \qquad (2.12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0 \qquad (2.13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0 \qquad (2.14)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0 \qquad (2.15)$$

En multipliant $(2.12),(2.13),(2.14)\ et\ (2.15)$ respectivement par $\frac{\partial F}{\partial p},\frac{\partial F}{\partial q},-\frac{\partial f}{\partial p}$ et $\frac{\partial f}{\partial q}$ on trouve :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p}+p\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p}=0 \qquad (2.16)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q}+q\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial q}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q}=0 \qquad (2.17)$$

$$-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}-p\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial p}=0 \qquad (2.18)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q}+q\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q}=0 \qquad (2.19)$$

La somme $(2.16)+(2.17)+(2.18)+(2.19)$ donne :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial p}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y}-\left(p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

C'est une équation aux dérivées partielles en F, considérée comme fonction des variables x,y,z,p,q. Le système est :

$$\frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{dq}{\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial p}}=\frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial q}}=\frac{dz}{-\left(p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}\right)}\frac{dF}{0} \qquad (2.20)$$

Ainsi, on peut prendre, pour (2.10), toute solution de ce système qui contient p ou q, ou les deux, qui contiennent une constante arbitraire, et pour laquelle (2.11) soit vérifiée.

Exemple 8 : Résoudre $q=-xp+p^2$

Soit $f=p^2-xp-q$

- $\frac{\partial f}{\partial x}=-p,\frac{\partial f}{\partial y}=0,\frac{\partial f}{\partial p}=2p-x,\frac{\partial f}{\partial q}-1$

- $\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = -p, \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0, -\frac{\partial f}{\partial p} = -2p + x = 1, -\left(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}\right) = -2p^2 + xp$ +q

Le système (2.20) est

$$\frac{dp}{-p} = \frac{dz}{0} = \frac{dx}{-2p + x} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{-2p^2 + xp + q}$$

De $\frac{dp}{-p} = \frac{dy}{1}$, on a :

$$\int \frac{dp}{-p} = \int dy$$

$$\Leftrightarrow lnp = -y + lna$$

$$\Leftrightarrow p = ae^{-y}$$

En utilisant l'équation différentielle donnée, $q = -xp + p^2 = -axe^{-y} + a^2\, e^{-2y}$

D'où, $dz = pdx + qdy$ devient :

$$dz = ae^{-y}dy + (-axe^{-y} + a^2\, e^{-2y})dy$$

$$\Leftrightarrow z = \int ae^{-y}dx + \int (-axe^{-y} + a^2\, e^{-2y})dy$$

$$\Leftrightarrow z = axe^{-y} - \frac{1}{2}a^2\, e^{-2y} + C$$

En posant $C = b$, on a :

$$z = axe^{-y} - \frac{1}{2}a^2\, e^{-2y} + b$$

Il n'y a pas de solution singulière.

2.2 SYSTÈMES HYPERBOLIQUES NON LINÉAIRES

On se propose de considérer des systèmes de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(u) = 0 \qquad (2.21)$$

u est un vecteur à n composantes et F_i une fonction régulière de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ dont le gradient est une matrice $A_i(u)$.

Le système (2.21) est non linéaire hyperbolique si les A_i sont des fonctions non linéaire de u et si les valeurs propres de la matrice $\sum_{i=1}^{n} F_i(u)\xi_i$ sont toutes réelles pour tout vecteur $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

De tels systèmes se rencontrent dans de nombreux domaines de la physique (Mécanique de fluides, Magnétohydrodynamique, combustion,…). Ils correspondent à des problèmes physiques célèbres, comme le calcul de la traînée et de la portance d'une aile d'un avion ou la propagation d'une onde de choc.

Pour comprendre la difficulté du problème, on peut considérer un modèle « abstrait » qui le décrit la distribution des vitesses d'un fluide monodimensionnel sans force extérieur. Le mouvement des particules est donné par l'équation différentielle ordinaire :

$$\dot{X}(t) = u(x(t), t) \qquad (2.22)$$

La relation fondamentale de la Mécanique conduit à écrire :

$$\begin{aligned} o = \ddot{x} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\dot{x}(t) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) \end{aligned} \qquad (2.23)$$

L'équation ainsi obtenue est dite de BURGERS.

On déduit de (2.23) que $\frac{du}{dt}(x(t), t) = 0$ et donc que u est constante le long des solutions de (2.22) ; ce qui implique ensuite que les courbes définies par (2.22) sont en fait des droites.

Cela permet de construire les solutions de l'équation de BURGERS :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0 \qquad (2.24)$$

$u(x, 0) = \varphi(x)$ pour une donnée initiale régulière φ et pendant un temps petit, en inversant l'équation $t\varphi(\xi_x) + \xi_x$, avec $u(x, t) = \varphi(\xi, x)$.

Un tel procédé n'est possible que tant que l'équation (2.24) cesse d'être résoluble. Or, l'équation (2.24) d'être résoluble dès que les deux droites caractéristiques se rencontrent, ce qui correspond à un choc entre les molécules de fluides et empêche que la solution reste continue.

Donc on est conduit à chercher une solution discontinue de (2.23) après le choc ; c'est-à-dire une fonction u-mesurale et bornée qui vérifie (2.24) au sens des distributions.

En particulier, si elle est discontinue le long d'une courbe $x = S(t)$, dite courbe de choc, elle devra vérifier la relation de saut :

$S'(-t) = \frac{1}{2}(u^+ + u^-)$, où u^+et u^- désignent les vitesses du fluide avant et après choc. Une telle relation, qui est contenue dans la formulation (2.24), au sens de distribution est dite relation de RANKINE-HUGONIOT.

En fait, un choc correspond à une perte d'information et, sur des exemples simples, on voit que la relation (2.24) ne suffit pas à assurer l'unicité de la solution.

Il convient d'ajouter une condition supplémentaire qui signifie que les caractéristiques restent dans le choc.

Une telle condition est dite condition d'entropie et celle est, dans cet exemple, équivalente à la condition $u^+ < u^-$ qui signifie que, dans un choc, la vitesse diminue.

On est donc conduit à résoudre l'équation (2.24) dans le cadre des fonctions qui admettent des discontinuités et qui vérifient de plus la relation d'entropie.

La vérification de cette relation d'entropie introduit une difficulté car elle fait intervenir les courbes de choc, qui sont elles-mêmes des inconnues du problème. Pour simplifier, on introduit une fonction $\eta(u)$, strictement convexe, quelconque et on note $g(u)$ la primitive de la fonction $\eta'(u) \cdot u$.

On remarque que là où u est une solution régulière, elle vérifie la relation :

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(u) + \frac{\partial}{\partial x}g(u) = 0 \qquad (2.25)$$

Cela cesse d'être vrai là où il y a des discontinuités, car la condition de sauf pour le premier membre de (2.25) est en général différente de la relation de RANKINE-HUGONIOT.

Ainsi, $\frac{\partial}{\partial t}\eta(u) + \frac{\partial}{\partial x}g(u)$ est une distribution dont le support est porté par l'ensemble des point singuliers de u. Il est facile de voir que la relation $u^+ > u^-$ est équivalente au fait que cette distribution est négative.

Une solution faible entropique est donc une fonction qui vérifie au sens des distributions les équations et inéquations :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0, \frac{\partial \eta}{\partial t}(u) + \frac{\partial g}{\partial x}(u) \leq 0 \qquad (2.26)$$

Dans le cas scalaire, on généralise ces notions à un système de η variables et on trouve (2.21) ; c'est-à-dire,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(u) = 0.$$

A toute fonction $\eta(u)$, on associe alors une fonction $G(u)$ définie par :

$$G(u) = (g_1, g_2, \dots, g_n); g'_i(u) = \eta'(u)F'(u) \qquad (2.27)$$

et on démontre qu'il existe une unique fonction u, solution au sens des distributions dans $\mathbb{R}_x^n \times [0,\infty]$ du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i} F_i(u) = 0 \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial t}(u) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i} g_i(u) \leq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{2.28}$$

Un des outils importants ici est l'utilisation des espaces de fonctions à variable bornée qui, en gros, sont des espaces de fonction dont les dérivées, au sens des distributions, sont des mesures. Ces espaces sont assez vastes pour contenir des fonctions discontinues à des théorèmes de convergence adaptés aux problèmes non linéaires.

Par exemple la suite de fonctions $U_n(x)\sin(nx)$ n'est pas uniformément à variable bornée. Une idée de base pour la construction de la solution est d'introduire l'équation perturbée :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \sum \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(u) = \xi u_\varepsilon, \tag{2.29}$$

$u(x,0) = \varphi(x)$.

C'est une équation paramétrique non linéaire dont la résolution beaucoup plus facile car la présence du laplacien empêche la formation de chocs.

Lorsque ε tend vers zéro, u_ε convergent vers une solution de (2.21). De plus, si on multiplie par $\eta'(u_\varepsilon)$, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(u_\varepsilon) + \sum_{i=1}^{n} g_i\,(u_\varepsilon) = \; \varepsilon\Delta\eta(u_\varepsilon) - \varepsilon\eta''(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^2 \tag{2.30}$$

Comme $\eta''(u_\varepsilon)$ est positif, on déduit la relation :

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(u_\varepsilon) + \sum \frac{\partial}{\partial x_i} g_i\,(u_\varepsilon) \leq \varepsilon\Delta\eta(u_\varepsilon).$$

Par suite u_ε est donc borné. Donc, $\varepsilon\Delta\eta(u_\varepsilon) = \Delta(\varepsilon\eta(u_\varepsilon))$ converge vers zéro au sens des distributions. On obtient ainsi l'inégalité d'entropie.

Dans la plupart des problèmes physiques, u n'est pas un scalaire mais un vecteur. On obtient donc l'équation de la forme (2.21) c'est-à-dire

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \sum \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(u) = 0$$

Or, comme dans le cas scalaire, ces systèmes génèrent des ondes de chocs.

Donc il est indispensable de chercher des solutions faibles.

On est amené à généraliser la relation de saut et la condition d'entropie. Pour l'entropie, une condition supplémentaire apparait car $\eta(u)$ est maintenant u e fonction de m variables réelles. On peut multiplier, à gauche l'équation (2.21) trouvée par le vecteur $\nabla\eta(u)$, mais il n'existe pas en général de fonctions $g_i(u)$ de m variable qui vérifie la relation

$$\begin{aligned} \nabla g_i(u) &= \nabla\eta(u)\nabla F_i(u) \\ &= (K_1(u), K_2(u), \dots, K_m(u)), \end{aligned} \tag{2.31}$$

car le vecteur figurant à droite de (2.31) n'est en général pas un vecteur gradient, il faut que l'on ait les relations

$$\frac{\partial K_i(u)}{\partial u_j} = \frac{\partial k_j(u)}{\partial u_i}$$

Un calcul simple montre que ces relations sont équivalentes à la relation matricielle

$$\nabla^2\eta(u)\nabla F_i(u) = \left(\nabla F_i F_i(u)^* \nabla^2\eta(u)\right) \tag{2.32}$$

où ce qui revient au même, à la symétrie des matrices $\nabla^2\eta(u)\nabla A_i(u)$. Il se trouve que la plupart des systèmes hyperboliques possèdent une fonction $\eta(u)$ qui vérifie les propriétés de commutation (2.32). Cette fonction coïncide, à un éventuel changement de signe près, avec la fonction d'entropie introduite en thermodynamique.

Ce fait justifie apriori le nom de fonctions d'entropie pour $\eta(u)$ et de flux d'entropie pour $g(u) = g\big(g_1(u), g_2(u), \dots, g_n(u)\big)$. Cette notion a deux conséquences importantes.

D'une part, elle conduit à caractériser les solutions des systèmes pour les équations et inéquations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \sum \dfrac{\partial}{\partial x_i} F_i(u) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\eta(u) + \sum \dfrac{\partial}{\partial x_i} g_i\,(u) \leq 0 \end{cases} \tag{2.33}$$

satisfaite au sens des distributions ; d'autre part, dans la phase de régularité, avec le données initiales régulières, le système (2.21) est équivalent à :

$$\nabla^2\,\eta(u)\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \nabla^2\eta(u)F'_i(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \tag{2.34}$$

qui constituent un système symétrique hyperbolique. Ces considérations justifient l'importance pratique des systèmes symétriques, dont les applications s'étendent bien au-delà des équations de MAXWELL et de DURAC.

Bien que les systèmes hyperboliques non linéaires aient suscité depuis long temps l'intérêt des mathématiciens (par exemple, en 1930, COURANT et FRIEDRICHS étudiaient les problèmes hyperboliques posés par le vol supersonique), on ne dispose pas de théorèmes permettant de prouver, dans un cadre assez général, l'existence et l'unicité de la solution d'un tel système. Pour u vecteur, le seul théorème actuellement disponible est relatif à une seule variable d'espace. Une démonstration a été donnée par GLIMM en 1966 sous des hypothèses assez générales. A part un traitement particulier du problème d'élasticité non linéaire, dû à DI PERNA, elle a été améliorée depuis.

Le modèle monodimensionnel est cependant très étudié car il correspond, par exemple, à la propagation d'une onde de choc dans un piston de moteur à explosion.

Il permet aussi de considérer des problèmes possédant une symétrie sphérique, comme le problème de l'explosion de la poudre autour des masses critiques d'une bombe atomique.

3 EQUATION DE KORTEWEG ET DE VRIES

3.1 DÉFINITION

C'est une équation aux dérivées partielles non linéaires et dispersive pour une fonction Ø de deux variables réelles *x* et *t* :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0,$$

Admettant des solutions « ondes solitaires» de la forme

$$\phi(\mathrm{x,t}) = -\frac{\mathrm{C}}{2}\left[\mathrm{Ch}^2\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{x}-\mathrm{Ct})\right]^{-1}$$

$$= \frac{-C}{2\left[\mathrm{Ch}^2\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{x}-\mathrm{Ct})\right]}$$

avec C>0 et qui sont des ondes qui se propagent avec une vitesse C sans déformer .Cette situation est fondamentalement différente de celle qui peut se produire dans un modèle linéaire.

3.2 APPLICATIONS

Une vague scélérate est une vague océanique très haute, modélisable comme solution particulière d'équations non linéaires, telles que l'équation de l'onde de BOUSSINESQ ou l'équation de KORTEWEG et DE VRIES.

3.3 VARIANTES

Il existe de nombreuses variantes d'équation d'onde de KORTEWEG et de VRIES. EN particulier, on peut lister les équations suivantes :

1. Equation de KORTEWEG-DE VRIES(KdV)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}+6\phi\frac{\partial \phi}{\partial x}=0$$

2. Equation de KOREWEG-DE VRIES cylindrique

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}-6\phi\ \frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\phi}{2t}=0$$

3. Equation de KORTEWEG-DE VRIES déformée

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2}-2\eta\phi^3-\frac{3\phi\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2}{2(\eta+u^2)}\right)=0$$

4. Equation de KORTEWEG-DE VRIES généralisée première forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}=\frac{\partial^5 \phi}{\partial x^5}$$

5. Equation de KORTEWEG-DE VRIES généralisée deuxième forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}+\frac{\partial}{\partial x}f(u)=0$$

6. Equation de KORTEWEG-DE VRIES du 7^{e} ordre de Lax

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{35\phi^5+70\left[\phi^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2\right]+7\left[2\phi\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}+3\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)^2+4\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right]+\frac{\partial^6 \phi}{\partial x^6}\right\}=0$$

7. Equation de KORTEWEG-DE VRIES modifiée, première forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\pm 6\phi^2\ \frac{\partial u}{\partial x}=0$$

8. Equation de KORTEWEG-DE VRIES modifiée, deuxième forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}-\frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^3}{8}+\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\left(Ae^{a\phi}+B+Ce^{-a\phi}\right)=0$$

9. Equation de KORTEWEG-DE VRIES sphérique

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}-6\phi\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\phi}{t}=0$$

10. Super équation de KORTEWEG-DE VRIES

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}=6\,\phi\frac{\partial \phi}{\partial x}-\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}+3\phi\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad (i)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=3\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\varphi+6\phi\frac{\partial \varphi}{\partial x}-4\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \qquad (ii)$$

11. Equation de KORTEWEG-DE VRIES de transition

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}-6f(t)\,\phi\frac{\partial \phi}{\partial x}=0$$

12. Equation de KORTEWEG-DE VRIES à coefficients variables

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\beta t^n\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}+\alpha t^n\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}=0$$

13. Equation de KORTEWEG-DE VRIES-BURGERS

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\lambda\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}+2\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}-\alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=0$$

4 LES EQUATIONS DE REACTION-DIFFUSION

Cette partie sera consacrée aux équations de réaction-diffusion pour lesquelles le comportement asymptotique est le problème essentiel. On aura en général, un nombre fini d'ondes solitaires. Mais, le rapport de parenté avec les équations différentielles ordinaires est bien plus important et on peut obtenir, dans certains cas, des démonstrations complètes :on s'appuie en particulier sur la théorie des systèmes dynamiques.

Les équations (ou systèmes) de réaction-diffusion s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\phi})\Delta\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\phi}) \qquad (\mathbf{2.35})$$

où $\phi(x,t)$ est une fonction vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ définie par la variable x parcourant un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Lorsque Ω est différent de $\mathbb{R}^n$, on suppose que $\phi(x,t)$ vérifie sur le bord des conditions aux limites classiques.

Dans cette équation, F est une fonction non linéaire régulière définie dans $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$; Δ désigne le laplacien usuel et $\boldsymbol{\mathcal{D}}_\phi$ est une matrice symétrique positive ou définie positive d'ordre 2. Lorsque $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ est définie positive, le problème non linéaire est parabolique dégénéré. Dans tous les cas, des méthodes de perturbation permettent de prouver que, pour toute donnée $\phi_0(x)$ définie à l'instant$t=0$, il existe au moins pour tout t petit et positif, une solution du système (2.35) qui vérifie :

$$\phi(x,0)=\phi_0(x)$$

Ces équations interviennent dans la description de phénomènes non linéaires dans lesquels la dépendance en espace introduit une évolution du type brownien. La dynamique des populations peut être modélisée par des équations de réaction-diffusion(en biologie mathématique). On les rencontre aussi dans la modélisation des réactions chimiques et, en particulier, dans les phénomènes de combustion, lorsque la vitesse de propagation de la flamme est assez lente par rapport à la cinétique chimique, contrairement au régime de détonation qui, lui, relève des systèmes hyperboliques.

Les théorèmes d'existence globale et certains résultats asymptotiques, reposent sur la notion de région invariante que l'on va décrire sur un exemple simple.

Supposons, pour simplifier, que $\Omega=\mathbb{R}$. on considère des solutions $\phi(x,t)$ qui tendent vers des limites finies ϕ^+et ϕ^- lorsque x tend vers plus ou moins l'infini.

On dira qu'une région Q de $\mathbb{R}^n$ (contenant ϕ^+et ϕ^-) est invariante si l'appartenance de ϕ_0 à Q pour tout x réel entraine pour $t>0$(éventuellement petit), la relation $\phi(x,t)\in\ Q$.

La notion de région invariante, conduit à étudier, pour t fixé, le comportement des courbes $x\to\phi(x,t)$ dans $\mathbb{R}^n$.

C'est la généralisation aux équations aux dérivées partielles de l'analyse faite, pour les équations différentielles ordinaires, à l'aide du plan des phases. On a par exemple le théorème suivant :

THÉORÈME

Supposons que (ϕ) est une matrice diagonale. Alors tout cube $Q=\prod_{i=1}^n]a_i,b_i[\,;\ a_i<b_i$ de $\mathbb{R}^n$ à faces parallèles aux hyperplans de coordonnées telles que, sur chaque face, le champ F soit rentrant, est une région invariante.

PREUVE

En effet, si la courbe $\phi(x,t)$ venait de sortir de Q, alors, il y aurait une valeur limite (x^*,t^*) pour laquelle $\phi(x,t)$ atteindrait la frontière de Q, par exemple sur la face $x_i=b_i$. Cela entrainerait sur $Q_i(x^*,t^*)$.

On écrit alors la i-éme composante de l'équation (2.35) pour obtenir :

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} - \boldsymbol{\mathcal{D}_i(\phi)} \frac{\boldsymbol{\partial^2 \phi_i}}{\boldsymbol{\partial x^2}} - \boldsymbol{F_i(\phi)} = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{2.36})$$

Comme (x^*, t^*) est un maximum de ϕ_i pour $x^* \in \mathbb{R}$ et $0 < t < t^*$, on a $\frac{\partial \phi_i}{\partial t}(x^*, t^*) > 0$ et $\frac{\partial^2 \emptyset_i}{\partial x^2}(x^*, t^*) < 0$. Comme F rentre dans Q et $\phi_i(x^*, t^*) = b_i$, on a $F_i(\phi) < 0$.

Ainsi, le premier terme de (2.36) est une somme des termes positifs dont un au moins strictement rentrant, ce qui conduit à une contradiction. De plus, une analyse plus précise permet de montrer que $Q = \prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[$ est une région invariante même si **F**, au lieu d'être strictement rentrant, est rentrant ou tangent.

L'existence d'une région invariante compacte permet d'obtenir, pour la solution (2.35), une majoration uniforme dans $L^\infty(\Omega)$.

On en déduit que, pour $t < T, \frac{d\phi}{dt} - \Delta\phi$ est uniformément bornée dans $L^\infty(\Omega)$ et, donc, d'après les propriétés des problèmes paraboliques, très régulière. Il en résulte ensuite que la solution est définie et régulière, non seulement pour t petit, mais pour $t > 0$. On se propose dans ce qui suit de décrire trois exemples significatifs.

EXEMPLE1

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \phi(\alpha - \phi)(1 - \phi), 0 < \alpha < 1$$

L'expression explicite $f(\phi) = -\phi(\alpha - \phi)(1 - \phi)$ n'est donnée que pour simplifier les calculs.

En fait, comme on peut facilement le constater, seules interviennent les propriétés géométriques globales de f.

Il convient de comparer l'équation de l'exemple (2.35) à l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = f(\phi) = -\phi(\alpha - \phi)(1 - \phi) \qquad (2.37)$$

On remarque que 0, α et 1 sont des points stationnaires pour l'équation (2.37) ; que 0 et 1 sont des points stables 1. Cette équation a été introduite par FISCHER en 1973 et utilisée pour décrire des problèmes de génétique des populations ou de propagation de flamme.

Il est naturel de chercher à décrire l'existence de fronts et leur stabilité ; ce qui conduit à chercher des solutions de la forme $\phi(x, t) = \phi(x - Ct)$. Reportant l'exemple 1, on obtient l'équation différentielle ordinaire :

$$-C\phi' = \phi'' - \phi(\alpha - \phi)(1 - \emptyset) \qquad (2.38)$$

En introduisant la valeur $\psi = \phi'$ on obtient le système :

$$\begin{cases} \phi' = \psi \\ \psi' = -C\psi + \phi(\alpha - \phi)(1 - \phi) = -C\psi - F(\phi) \end{cases} \qquad (2.39)$$

Un front ou onde solitaire est alors une solution de (2.39) qui vérifie les relations

$$\lim_{\xi \to +\infty} \phi(\xi) = 1, \lim_{\xi \to -\infty} \phi(\xi) = 0, \lim_{|\xi| \to \infty} \psi(\xi) = 0, \qquad (2.40)$$

On supposera désormais que la fonction $F(\phi)$ vérifie la relation

$$\int_0^1 F(\phi) d\phi > 0 \qquad (241)$$

et on obtient le point M par la relation

$$\alpha < M < 1, \int_0^1 F(\phi) d\phi = 0 \qquad (2.42)$$

Le point (0, 0) est un point hyperbolique pour le système (2.39) et il a donc une solution de (2.39) vérifiant :

$$\lim_{\xi \to -\infty} (\phi(\xi), \psi(\xi)) = 0,$$

tangente à la direction hyperbolique répulsive.

Lorsque ξ augmente, ψ augmente jusqu'à ce que $(\phi(\xi), \psi(\xi))$ rencontre la courbe $C\psi = -F(\phi)$.

Puis ψ diminue o obtient alors deux possibilité : soit $(\phi(\xi), \psi(\xi))$ recoupe l'intervalle $[0,1]$ en un point $M_c > M$, soit $(\phi(\xi), \psi(\xi))$ recoupe la courbe $C\psi = -F(\phi)$ en un point $\phi > 1$. Ces deux circonstance dépendent du choix de C. La première se produit pour C petit et pour C grand.

On montre alors que le point M_c est une fonction croissante de C et qu'il existe donc une unique valeur $C^* > 0$, telle que $M_{C^*} = 1$.Elle correspond au front, orbite de (2.39),connectant les points hyperboliques (0,0) et (1,0).

De plus, il est clair que $\phi(x - C^*t)$ est une onde solitaire, il en est de même de toute solution translatée. On peut alors montrer en utilisant des théorèmes de comparaison pour des équations paraboliques non linéaires, le résultat de stabilité suivant, dû à FIFE et MAC LEUD.

Supposons que la donnée initiale $\phi_0(x)$ est majorée et minorée par deux ondes solitaires translatées.

Plus précisément, il existe A et B positifs, éventuellement grands, tels que l'on ait :

$$\phi(x - A) < \phi_0(x) < \phi(x + B)\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alors il existe un nombre D tel que $\phi(x, t)$, solution de (2.39), converge vers $\phi(x - C^*t - D)$.

La situation décrite dans le type de problème est donc radicalement différente de celle que l'on rencontre pour les équations de KORTEWEG-DE VRIES. Il n'y a qu'une onde solitaire (à une translation près) et sa vitesse est caractéristique du problème. On a pu démontrer son existence et sa stabilité en utilisant les techniques des équations différentielles ordinaires et la monotonie.

L'exemple 1est particulièrement simple car il est scalaire. Cela correspond à des situations très simples dans lesquelles une seule quantité(ou le rapport de deux quantités) interviennent. Dans le cas des systèmes, la situation est bien plus complexe.

EXEMPLE 2 : LE SYSTÈME DE FITZUGH ET NAGUMO

Dans leurs travaux sur la propagation de l'influx nerveux, HODGKIN et HUXLEY observèrent les phénomènes suivants :

- Il existe un seuil d'excitation : toute excitation inférieure à ce seuil ne produit pas de phénomène visible ;
- Au-dessus du seuil d'excitation, on obtient un signal qui a une forme constante et se propage à la vitesse constante.

HODGKIN et HUXLEY ont conjoncture que ce comportement était dû à la diffusion et l'interaction non linéaire entre un potentiel électrique et les réactions entre eux de plusieurs ions et, donc, que ce mécanisme était contrôlé par un système d'équation de réaction-diffusion.

Le travail mathématique a consisté alors à montrer que les solutions du système d'HODGKIN-HUXLEY avaient un comportement conforme à l'expérience (existence de seuil et apparition d'ondes solitaires stables).Sans en démontrer la validité, cela rend plausibles les équations HODGKIN-HUXLEY .ces propriétés ont été démontrées par C.CONLEY et plusieurs de ces élèves en utilisant une généralisation, en dimension infinie, des théorèmes de perturbation et de l'indice de MORSE utilisé dans la théorie des équations différentielles ordinaires. Il n'est bien sûr pas possible de décrire ici ces travaux, mais on peut donner certaines idées en remplaçant le système de HODGKIN-HUXLEY par le système plus simple, ayant les propriétés asymptotiques équivalentes, dû à FITZUGH et NAGOMO.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + f(\psi) - \phi \qquad (2.43)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \varepsilon(\sigma\psi - \lambda\phi) \qquad (2.44)$$

Comme dans l'exemple précédent $f(\psi)$ a le comportement qualificatif de la cubique

$$f(\psi) = -\psi(\psi - a)(\psi - b); 0 < a < b.$$

Les nombres σ, λ et ε sont des constantes positives et la droite $\sigma\psi - \lambda\phi = 0$ rencontre la courbe $\phi = f(\psi)$ uniquement au point 0.

On observe en premier lieu l'existence de deux familles de régions invariantes, celles qui sont limitées par des grands rectangles **R** et celles qui sont limitées par des petits rectangles **r** .

EXEMPLE 3 : LA RÉACTION DE BIELOUZON-ZABOTINSKI

En 1959, BIELOUZON a découvert, dans l'oxydation l'acine malonique par le bromate de potassium, en présence d'ions sérum, des mécanismes de structuration spatiotemporels autoentretenus qui se présentent comme une superposition d'ondes solitaires radicales.

L'analyse des mécanismes de réaction conduit à écrire un système à trois inconnues principales :

$X \equiv BrO_2, Y = Br^-$ et Z forme oxydée de l'ion cérum. On a alors le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \alpha(Y - XY + X - \beta X^2) \\ \dfrac{\partial Y}{\partial t} = \dfrac{1}{\alpha}(\lambda Z - Y - XY) \\ \dfrac{\partial Z}{\partial t} = \delta(X - Z) \end{cases} \qquad (2.45)$$

où $D, \alpha, \beta, \lambda, \delta$ désignent les constantes positives. Comme X, Y, Z désignent des concentrations de produits chimiques, il est naturel de décider qu'on se limite aux solutions du système (2.45) positives et bornées.

En fait, on montre facilement que si a, b, c vérifient les inégalités :

$$a > max\left(1, \frac{1}{\beta}\right), c > a, b > \lambda c,$$

la région

$$R = \{0 < X \leq a, 0 < Y \leq b, 0 < Z \leq c\}$$

est invariante pour le système (2.45).

le système différentiel ordinaire associe à (2.45) obtient en supprimant la viscosité, a deux point stationnaires (0, 0, 0) et $\left(X_0, \frac{\lambda X_0}{1+X_0}, X_0\right)$ où X_0 est la solution positive d'une équation du second degré.

Lorsque β est petit, ce point est instable, et on peut prouver l'existence de solution homogène en espace et périodiques en temps, par contre pour β grand, le point stationnaire est stable et il n'y a pas de solution homogène périodique en temps. On écrit alors le système différentiel correspondant qui a une solution onde stationnaire.

Introduisant comme dans les exemples précédents la nouvelle variable $N = \frac{dX}{d\varepsilon}$ et $\varepsilon = x - Ct$, on obtient un nouveau système différentiel qui possède bien la nouvelle solution stationnaire $\left(X_0, \frac{\lambda X_0}{1+X_0}, 0\right)$; par contre, ce point est instable et on peut prouver qu'il existe dans son voisinage une solution périodique, donc une onde solitaire périodique, qui, elle sera stable pour le système d'évolution. On a ainsi montré que, pour β assez grand, on observe un phénomène en espace-temps.

5 LES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

La résolution des équations de NAVIER-STOKES constitue l'un des problèmes du prix du millénaire. Le défi consiste à faire progresser les théories mathématiques liées aux équations de NAVIER-STOKES dans le but d'expliquer des phénomènes tels que le mouvement des vagues produit par un tableau en déplacement.

En Mécanique des fluides, des équations de NAVIER-STOKES sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides newtoniens (visqueux) dans l'approximation des milieux continus. Elles modélisent par exemple le mouvement de l'air de l'atmosphère, les courants océaniques, l'écoulement de l'eau dans un tuyau et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de fluides. Elles sont nommées d'après deux physiciens de XIX^e siècle : CLAUDE NAVIER et GEORGES STOKES.

Pour un gaz peu dense, il est possible de dériver ces équations à partir de l'équation de BOLTZMANN.

5.1 LOI DE CONSERVATION

Il existe bien des formes d'équations de NAVIER-STOKES. Nous n'en présentons que certaines. Ces formes dépendent aussi des notations utilisées. Ainsi, il existe plusieurs façons équivalentes d'exprimer les équations de conservation en termes d'opérateurs différentiels.

La formulation différentielle de ces équations en coordonnées cartésiennes est :

- Equation de continuité (ou équation de bilan de masse)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0$$

- Equation de bilan d'énergie

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + div[(\rho e + p)\vec{v}] = div\left(\bar{\bar{T}} \cdot \vec{V}\right) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} - div(\vec{q}) + r$$

- Equation de bilan de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} + div(\rho \vec{v} \oplus \vec{v}) = -gr\vec{a}d(p) + div\left(\bar{\bar{T}}\right) + \rho \vec{f}$$

Dans ces équations :

- t représente le temps (Unité SI : s)
- ρ désigne la masse volumique du fluide (Unité SI : $\mathrm{kgm^{-3}}$)
- $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ désigne la vitesse eulérienne d'une particule fluide (Unité SI : $\mathrm{ms^{-1}}$)
- p désigne la pression (Unité SI : Pa)
- $\bar{\bar{T}} = \left(T_{i,j}\right)_{i,j}$ est le tenseur des contraintes visqueuses (Unité SI : Pa)
- $\vec{f}$ désigne la résultante des forces massiques s'exerçant dans le fluide (Unité SI : $\mathrm{Nkg^{-1}}$)
- e est l'énergie totale par unité de masse (Unité SI : $\mathrm{Jkg^{-1}}$)
- $\vec{q}$ est le flux de chaleur perdu par conduction thermique (Unité SI : $\mathrm{Jm^{-1}s^{-1}}$)
- r représente la perte de chaleur volumique due au rayonnement (Unité SI : $\mathrm{Jm^{-3}s^{-1}}$)
- $div =$ divergence
- $gr\vec{a}d =$ gradient

REMARQUES

- L'énergie totale peut se décomposer en énergie interne u et en énergie cinétique selon

$$e = u + \frac{1}{2}\vec{v} \cdot \vec{v} = u + v^2$$

- Coordonnées cartésiennes

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

est un opérateur de dérivation spatiale du premier ordre. Les opérateurs gradient, divergence et laplacien peuvent s'écrire à l'aide de cet opérateur :

- $div\vec{a} = \vec{\nabla}\vec{a}$
- $gr\vec{a}dA = \vec{\nabla}\vec{a}$
- $\Delta A = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}A)\nabla^2 A$

5.2 LOI DE COMPORTEMENT DE FLUIDE NEWTONIEN, HYPOTHESE DE STOKES

En première approximation, pour de nombreux fluides usuels comme l'eau et l'air, le tenseur des contraintes visqueuses est proportionnel à la partie symétrique du tenseur de taux de déformation (hypothèse du fluide newtonien) et le flux de chaleur est proportionnel au gradient de la température (loi de FOURIER) ; c'est-à-dire,

$$\bar{\bar{T}} = \mu\left[\left(\vec{\nabla} \oplus \vec{v}\right) + \overline{(\vec{\nabla} \oplus \vec{v})t}\right] + \eta(\vec{\nabla}\vec{v})\vec{\mathrm{T}}$$

$$\vec{q} = -\lambda\vec{\nabla}T$$

avec:

* μ la viscosité dynamique (Unité SI : Poiseille « Po » avec 1Po=0,1 Pa.s)
* $\bar{\bar{T}}$ le tenseur (Unité SI : Pa)
* λ la conductivité thermique du fluide (Unité SI : $\mathrm{Wk^{-1}m^{-1}}$)
* T la température (Unité SI : K)

Tous les fluides pour lesquels cette hypothèse est vérifiée sont appelées fluides newtoniens. On lui adjoint généralement l'hypothèse de STOKES : $3\eta + 2\mu = 0$

Cette hypothèse se révèle totalement fausse mais elle est couramment utilisée dans l'Aérodynamique.

EXPRESSION POUR LES ÉCOULEMENTS DE FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Pour u fluide visqueux newtonien et lorsque l'écoulement est incompressible, l'équation de l'énergie est découplée des équations de continuité et de quantité de mouvement, c'est-à-dire qu'on peut déterminer l vitesse et la pression indépendamment de l'équation de l'énergie.

L'expression des équations de continuité et de quantité de mouvement sont considérablement simplifiées. Ainsi, on obtient l' :

- Equation de continuité appelée équation d'incompressibilité :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

- Equation de bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v} = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + v\nabla^2\vec{v} + \vec{f}$$

avec,

- $v = \frac{\mu}{\rho}$ désignant la viscosité cinématique du fluide (Unité SI : $\mathrm{m^2s^{-1}}$)
- $\left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{v}$ le terme de convection que l'on peut décomposer en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0;$$

- $\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + v\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) + gx$
- $\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + v\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) + gy$
- $\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + v\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) + gz$

5.3 INTERPRÉTATION

L'équation de conservation de la quantité de mouvement se déduit de la relation fondamentale de la dynamique (aussi appelée seconde loi de newton) : $m\vec{a} = \sum F$ en l'appliquant dans le contexte des milieux continus. Le membre de droite fait apparaître deux types de forces :

- Les forces intérieures (ou contraintes) :
  - Liées à la pression : existent même lorsque le fluide n'est pas en mouvement (on parle de la contrainte hydrostatique).
  - Liées à la viscosité : traduisent la résistance du fluide à la déformation. Le terme contenant la viscosité de volume η disparaît si le fluide est incompressible ; les déformations se font alors à volume constant (on parle de fluide isovolumique).
- Les forces extérieures :
  - Les efforts volumiques : peuvent être des forces de gravité ($\vec{f} = \vec{g}$) ou électromagnétique $\vec{f} = \frac{q}{p}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ par exemple ;
  - Les efforts surfaciques : correspondent, la plupart de temps, aux conditions aux limites imposées par un obstacle ou une paroi solide. Le membre de gauche exprime l'accélération du fluide. Pour comprendre d'où provient cette expression, il est utile de rappeler que deux points de vue peuvent être adoptés pour décrire le mouvement dans un milieu continu.
  - La description lagrangienne suit chaque particule le long de sa trajectoire : la valeur d'une variable (température, pression, vitesse,…) dépend de l'instant t et de particule considérée (identifiée par sa position $\vec{\varepsilon}$ à l'instant t_0 de référence).
  - La description eulérienne est associée un repère indépendant du mouvement du fluide, généralement fixé : la valeur des variables fluides, dépend alors du temps t et de la pression d'observation $\vec{x}$.

5.4 ORIGINE DU TERME D'ADVECTION

Le terme d'advection caractéristique des équations de NAVIER-STOKES a une origine mathématique simple inhérente entre une différentielle totale exacte et les dérivées partielles.

En effet, pour une particule fluide, l'accélération est donnée par :

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{dt} = \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \sum \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

avec : ρ la densité du fluide, $\vec{v}$ le vecteur vitesse et $\{x\}$ les coordonnées spatiales considérées.

- En coordonnées cartésienne, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \vec{v}}{dt} &= \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial \rho \vec{v}}{dt} + v_x \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial z} \end{aligned}$$

- En coordonnées cylindriques, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \vec{v}}{dt} &= \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial \rho \vec{v}}{dt} + v_r \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial z} \end{aligned}$$

- En coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \vec{v}}{dt} &= \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial \phi}\frac{d\phi}{dt} \\ &= \frac{\partial \rho \vec{v}}{dt} + v_r \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial r} + \frac{v_\theta}{v sin\theta} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{v} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial \phi} \end{aligned}$$

Quelles que soient les coordonnées, on retrouve donc le terme d'advection :

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{dt} = \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\rho \vec{v} = \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \oplus \vec{v})$$

Comme souvent, la formulation de l'accélération sous forme des dérivées partielles permet une recherche plus facile de solution à des problèmes particuliers, l'intégration des dérivées partielle étant généralement facilitée en comparaison des équations comportant des différentielles exactes. Ici, cette démarche conduit à l'apparition du terme d'advection qui rend compte du transport de matière, découplé de la variation intrinsèque de la vitesse due à des forces externes aux fluides.

Dans le cas d'un fluide incompressible, ce terme d'advection peut se décomposer

$$(gr\vec{a}d\vec{v}) = (r\vec{o}t\vec{v})\wedge\vec{v} + gr\vec{a}d\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

On peut alors définir le pseudovecteur verticité :

$$\vec{\omega} = r\vec{o}t\vec{v}$$

On peut aussi définir le vecteur dit lamb :

$$\vec{l} = \vec{\omega}\wedge\vec{v}$$

6 CONCLUSION

Au terme de ce travail, nous avons réalisé un texte de degré de compréhension abordable et qui pourra servir pour les recherches ultérieures en mathématiques sur les équations aux dérivées partielles. Nous avons présenté les résultats suivants :

- Quelques définitions et méthodes de résolution d'une équation aux dérivées partielles non linéaires du premier ordre.
- Systèmes hyperboliques non linéaires qui sont des équations aux dérivées partielles non linéaires rencontrées en physique et en sciences de l'ingénieur. Ces systèmes constituent un domaine où la différence entre le comportement des problèmes linéaires et les problèmes non linéaires apparait de manière évidente, mais ils présentent deux inconvénients : il n'existe que des résultats partiels et la plupart des questions restent largement ouvertes surtout les applications concernant ma mécanique des fluides compressibles.
- Equations de KORTEWEG et de VRIES qui constituent un modèle mathématique pour les vagues en faible profondeur. Ce sont aussi des équations aux dérivées partielles dont on connait les solutions.
- Equations de Réaction-diffusion qui sont aussi des équations aux dérivées partielles non linéaires pour lesquelles le comportement asymptotique est le problème essentiel. Ces équations trouvent leurs applications en physique, en chimie, en biologie (écologie), etc.
- Equations de NAVIER- STOKES qui sont aussi des équations aux dérivées partielles non linéaires applicables surtout en mécanique des fluides. La solution de ces équations est l'un des problèmes du prix du millénaire du Clay Mathematics Institute (CMI), une organisation sans but lucratif visant l'amélioration des recherches en Mathématiques. Une organisation fondée par l'Américain London Clay en 1999.

Par cet article, nous n'avons pas la prétention d'avoir épuisé tous les points sur les équations aux dérivées partielles non linéaires. Le champ reste largement ouvert aux matheux chercheurs à venir.

REFERENCES

[1] AYERS JR.F (1972), *Theory and Problems of Differential Equations*, MC GRAW-Hill, New-York, 1st Edition
[2] BORDAS C. (1995), *Equations aux dérivées partielles non linéaires*. *In Encyclopaedia universalis*, Corpus 7, Paris
[3] DEMENGEL F. et DEMENGEL G.(2007), *Espaces fonctionnels : utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles*, CNRS Editions, Paris
[4] GERMAINE R. et ANDRE (1966), *Le cours de l'APM II Eléments de topologie*, Paris.
[5] WALTER R. (1995), *Principes d'analyse mathématique*, Paris.