International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 13 No. 4 Dec. 2015, pp. 958-964

http://www.ijias.issr-journals.org/

ETUDE MATHEMATIQUE ET OBSERVATIONS D'UN SIGNAL ANALYTIQUE : LA CAUSALITE

[MATHEMATICAL STUDY AND OBSERVATIONS OF AN ANALYTIC SIGNAL : THE CAUSALITY]

Gordien TAMBA OF'R

Département de Mathématique et Informatique, Université Pédagogique Nationale,
Centre International des Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA),
Kinshasa, Ngaliema, BP 885, RD Congo

ABSTRACT: The causality, one of the results of the Hilbert transform on an analytic signal outlines on one hand the mathematical study on a measure that uses complex-valued functions by the Fourier transform (spectra) that takes into account, in general the negative frequencies, and on the other hand the measurement ustensils (observations) which give the real-valued signals with positive observable frequencies. Herein, we assume the signal denoted by *x* to be real.

KEYWORDS: Analytic signal, transform, spectra, causality.

RESUME: La causalité, un des résultats de la transformée de Hilbert sur un signal analytique met en exergue d'une part l'étude mathématique sur une mesure qui fait intervenir des fonctions à valeurs complexes par la transformée de Fourier (spectre) qui prend en compte, en général les fréquences négatives, d'autre part des appareils de mesure (observations) qui donnent les signaux à valeurs réelles avec les fréquences observables positives [13][20][24]. Ici, nous supposons le signal noté x est réel.

MOTS-CLEFS: signal analytique, transformée, spectre, causalité.

1 INTRODUCTION

La transformée de Fourier d'une fonction est définie sur la totalité de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ $(i.e\ ]-\infty;+\infty[)$, donc aussi bien pour les fréquences négatives que pour les fréquences positives. Or, les appareils (tels que : les transformateurs de Fourier, les analyseurs de spectre, …) ne permettent pas d'atteindre les fréquences négatives dont la signification physique est inconnue. Lorsque le signal *x*, fonction ou distribution, est réel, la transformée *x* possède la symétrie hermitienne, c'est-à-dire la propriété [9][13][14] :

$$\hat{x}\,(-\lambda) = \hat{x}(\lambda) \tag{1}$$

Dans ce cas, il suffit de connaitre $\hat{x}$ lorsque (λ) est positif (forme unilatérale de $\hat{x}$) pour connaitre entièrement $\hat{x}$. Dans beaucoup de problèmes de la théorie du signal, on a besoin de connaitre une fonction dont la transformée de Fourier soit exactement la forme unilatérale de $\hat{x}$. Cette fonction notée Z_x, appelée signal analytique associé à *x* est telle que sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(Z_x)$ donne, à un coefficient près, la forme unilatérale de $\hat{x}$. Précisément [5] :

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(Z_x)(\lambda) = 0 \qquad si\ \lambda < 0 \\ &\mathcal{F}(Z_x)(0) = \hat{x}(\lambda) \end{aligned} \tag{2}$$

et : $\boldsymbol{\mathcal{F}(Z_x)(\lambda) = 2\hat{x}(\lambda)\ si\ \lambda > 0}$

Après calcul, nous trouvons la fonction Z_x, exprimée en t :

$$\boldsymbol{Z_x = x - \frac{1}{i\pi} x * V_p(\frac{1}{t})} \quad \textbf{(3)}$$

La convolution qui figure dans la partie imaginaire définit la transformée de Hilbert de *x*.

2 DEFINITION DE LA TRANSFORMATION DE HILBERT

On note souvent la transformée de Hilbert de *x* comme on note une fonction [3]:

$$\boldsymbol{t \to H_x(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(u)}{t-u} du} \quad \textbf{(4)}$$

Mais cette intégrale est très souvent divergente au sens des intégrales généralisées. On précise quelques fois, que cette intégrale est prise en valeur principale.

Nous utilisons quelques exemples pour examiner cette définition.

Montrons que pour la fonction constante $x: u \to 1$, l'intégrale (4) n'a pas de sens.

En effet,

Pour $x(u) = 1$, H_x n'est définie en aucun point. La fonction de *u*, où t est fixé : $u \to \frac{1}{t-u}$ admet un point de discontinuité pour *u=t*. On sait que l'intégrale généralisée correspondante n'est pas convergente (il suffirait d'ailleurs de passer par l'intermédiaire d'une primitive qui donne un logarithme). La fonction H_x n'est donc définie en aucun point.

Notons H(*x*) (ou H*x* ou même $\breve{x}$) la transformée de Hilbert de la fonction *x* et précisons sa définition *x* et précisons sa définition par la formule suivante :

$$\boldsymbol{H(x)(t) = \frac{1}{\pi}\lim_{t\to 0^+}[\int_{t+\varepsilon}^{+\infty} \frac{X(u)}{t-u} du + \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{X(u)}{t-u} du]} \quad \textbf{(5)}$$

Nous montrons que, pour la fonction *x* : $u \to 1$, ces intégrales ne sont toujours pas convergentes (en $+\infty$ $et\ en -\infty$) et en considérant pour *x* la fonction porte Π, H(*x*) est définie partout sauf aux points de discontinuité de *x* enfin de H(*x*) est localement sommable (une distribution lui est associée) [1][8].

En effet, utilisons la nouvelle définition :

$$\boldsymbol{\int_{t+\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{t-u} du = \lim_{A\to\infty} \int_{\varepsilon}^{A} \frac{1}{t-u} du = \lim_{A\to\infty} [-ln|t-u|]_{\varepsilon}^{A} = -\infty}$$

Faisons une discussion selon les valeurs de t.

Pour $t < -1$,

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{\Pi(u)}{t-u} du = 0 \text{ et } \int_{t+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\Pi(u)}{t-u} du = \int_{-1}^{1} \frac{du}{t-u}}$$

Avec ε assez petit, nous obtenons pour $t < -1$ $(i.e\ t + \varepsilon < -1)$,

$$\boldsymbol{H_x(t) = \frac{1}{\pi}[-ln|t-u|]_{u=-1}^{u=1} = \frac{1}{\pi} ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|} \text{ et de même pour } \boldsymbol{t > 1}$$

Avec $t \in]-1, +1[$

$$\boldsymbol{H_x(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{t-\varepsilon} \frac{\Pi(u)}{t-u} du + \frac{1}{\pi}\int_{t+\varepsilon}^{1} \frac{\Pi(u)}{t-u} du = \frac{1}{\pi} ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|}$$

Mais la fonction H_X n'est pas définie au point t=+1 ou t=-1. Les résultats précédents fournissent la même expression logarithmique sur ℝ privé des points -1 et +1. On sait que les deux logarithmes sont intégrables sur des segments contenant ces points et, par conséquent on en déduit que la fonction H_x est localement sommable [7][13].

Soit *x* une fonction continue et de dérivée continue, équivalente au voisinage des infinis à $\frac{1}{u}$, nous montrons que, $\forall t, Hx(t)$ existe et sous les hypothèses faites, Hx(t) est définie par :

$$H_x(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x(t-v) - x(t+v)}{v} dv$$

en prenant pour définition de H_x, la fonction telle que, là où la limite existe, on ait :

$$H(x)(t) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}[\int_{t+\varepsilon}^{+\infty} \frac{x(u)}{t-u} du + \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{x(u)}{t-u} du] = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x(t-v) - x(t+v)}{v} dV$$

avec le cas où la fonction H_X obtenue ainsi est localement sommable, ce qui nous permettra de donner un sens à la distribution $[H_X]$ [23][24].

En effet,

Dans les intégrales, le problème des infinis est facilement réglé par une équivalence de la fonction à intégrer.

Au voisinage de $+\infty\ ou - \infty$,

$$\frac{x(u)}{t-u} \sim_{\infty} \frac{1}{u(t-u)} \sim_{\infty} -\frac{1}{u^2}$$

on en déduit la convergence à l'infini et reste à traiter la discontinuité u=t. En faisant les changements de variables *t-u=v*, puis *w=-v*, on est ramené à étudier, pour $A > 0$ fixé

$$\lim_{\varepsilon\to A}[\int_{\varepsilon}^{A} \frac{x(t-v)}{v} dv + \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{x(t-v)}{v} dv]$$

ou

$$\lim_{\varepsilon\to A}[\int_{\varepsilon}^{A} \frac{x(t-v) - x(t+v)}{v} dv]$$

Appliquons, à présent le théorème des accroissements finis qui va permettre, ici, de prouver que l'on peut prolonger par continuité au point 0 la fonction sous le signe somme, établissant ainsi que la limite précédente existe et s'exprime par une intégrale ordinaire sur l'intervalle [0, A],

$$x(t-v) - x(t+v) = -2vx(t+\theta v); \theta \in]-1, 1[$$

donc

$$\lim_{v\to 0} \frac{x(t-v) - x(t+v)}{v} = \lim_{v\to 0}\left(-2vx'(t+\theta v)\right) = -2x'(t)$$

Par continuité de la dérivée, les problèmes de convergence à l'infini étant réglés, on peut remplacer A par $+\infty$ dans les limites précédentes. On a ainsi :

$$H_X(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{x(t-v) - x(t+v)}{v} dv$$

3 RELATION AVEC LA NOTION DE SIGNAL ANALYTIQUE

Dans ce paragraphe, nous supposons que *x* et H_X sont des fonctions continues, donc localement sommables et les interversions d'intégrales, de limites et les changements de variables sont licites[7][17][23][25].

a) Interprétation de H_X à l'aide d'une convolution

Tenant compte de la définition d'une convolution, on a :

$$< [x] * V_p\left(\frac{1}{t}\right), \varphi > = < V_p\left(\frac{1}{t}\right), < [x], \varphi(t+u) >>$$

Avec φ comme fonction de base. En utilisant la définition de Vp comme limite d'une différence de deux intégrales sur $[\varepsilon, +\infty]$, en effectuant des changements des variables dans chaque intégrale et en échangeant l'ordre des intégrations, montrons le résultat suivant :

$$[H_X] = \frac{1}{\pi}[x] * V_p(\frac{1}{t})$$

En effet,

Par des calculs formels, nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\varphi(t+u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(v-t)\varphi(v)dv$$

avec un changement des variables *v=u+t* et la relation analogue où –t remplace t, puis d'abord

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\varphi(t+u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(v-t)\varphi(v)dv = < V_p\left(\frac{1}{t}\right), < [x], \varphi(t+u) >>=$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{t}(< x(u), \varphi(t+u) > - < x(u), \varphi(-t+u) >)dt$$

$$< V_p\left(\frac{1}{t}\right), < [x(u)], \varphi(t+u) >>= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v)[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{x(v-t)}{t}dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{x(v+t)}{t}dt]dv$$

$$< V_p\left(\frac{1}{t}\right), < [x(u)], \varphi(t+u) >>= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(v-t)-x(v+t)}{t}\varphi(v)dv)$$

donc

$$< [x(u)] * V_p\left(\frac{1}{t}\right), \varphi(t) >= < \pi[H_X], \varphi(t) >$$

Enfin nous avons :

$$[H_X] = \frac{1}{\pi}[x] * V_p(\frac{1}{t})$$

b) Nous supposons que *x* et H_X ont toutes des transformées de Fourier, soit au sens des fonctions, soit au sens des distributions et que d'autre part, on peut utiliser le résultat sur la transformée d'un produit de convolution et calculons dans ces conditions, la transformée de Fourier de $[H_X]$ à l'aide de celle de *x* [4][9][13].

En effet,

On sait que la convolution se transforme par Fourier en produit, on a :

$$\mathcal{F}([H_x]) = \mathcal{F}([x])\mathcal{F}\left(V_p\frac{1}{\pi t}\right) = \mathcal{F}([x]).(-i)[sgn(\lambda)]$$

$$\mathcal{F}([H_x]) = -isgn(\lambda)\mathcal{F}(X)(\lambda)$$

Cette dernière formule n'ayant guère de sens que si la transformée de Fourier de *x* est une fonction et nous pouvons la multiplier par la fonction sgn.

Le signal analytique est, sous les conditions précédentes, défini par la formule (3), tout en déterminant sa transformée de Fourier à l'aide de celle de *x* et en particulier les signaux analytiques associées respectivement à la fonction cosinus et à la fonction porte [22][23].

En effet, $x+iH_x$ à l'aide de la transformée de Fourier, nous obtenons :

$$\mathcal{F}(x+iH_x)(\lambda) = \mathcal{F}(x)(1+sgn(\lambda))$$

Or, d'après la définition de la fonction signe, nous voyons que $x+iH_x$ a pour transformée de Fourier la partie unilatérale de la transformée de x et on en déduit que : $Z_X = x + iH_X$. De ce qui précède, le signal analytique associé à la fonction cosinus est $cost + isint = e^{it}$. Celui associé à la fonction porte Π est défini par la formule :

$$t \to \Pi(t) + \frac{i}{\pi}ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|$$

4 QUELQUES PROPRIETES DES TRANSFORMEES DE HILBERT

Nous déterminons ici trois propriétés des transformées de Hilbert qui seront d'usage pour ce travail [5][7][8][17][19][23][24]:

a) Nous montrons que le signal *x* et sa transformée de Hilbert H_X sont en quadrature, ce qui veut dire que leurs spectres d'amplitude sont identiques et que leurs spectres des phases ne diffèrent que de $\pm\frac{\pi}{2}$ tout en sachant que le spectre d'amplitude d'un signal est défini par le module de sa transformée de Fourier, le spectre de phase est défini par son argument réduit. Et de ce fait, x et H_X sont orthogonaux, c'est-à-dire : $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)H_X(t)dt = 0$ (on supposera que *x* et H_X sont d'énergie finie et on appliquera la formule de Planchenel-Parseval). Enfin, pour deux signaux *x* et *y*, pour lesquels on peut définir H_X et H_Y, on a les relations :

$$\boldsymbol{H(x * y) = Hx * y = x * Hy}$$

Et

x*y=Hx*Hy

En effet, l'usage fait des formules qui lient les transformées de Fourier de *x* et de celle de H_X, on conclut à l'égalité des modules :

$$|\boldsymbol{\mathcal{F}(x)}| = \boldsymbol{\mathcal{F}(y)}$$

A cause de la présence de i $sgn(\lambda)$ en facteur, on constate aussi que les arguments différents de $\pm\frac{\pi}{2}$.

Étant donné que *x* et H*x* sont des réels et en appliquant la formule de Plancherel, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x(t)H_X(t)dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\mathcal{F}(x)(\lambda)\mathcal{F}(H_X)(\lambda)d\lambda} = -\mathbf{i}\int_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{\mathcal{F}(x)(\lambda)}|^2 \boldsymbol{sgn(\lambda)d\lambda} \ = \mathbf{0}$$

Toutes ces intégrales existent car les fonctions sont supposées d'énergie finie, en particulier la dernière est nulle car elle porte sur une fonction impaire.

Enfin, en considérations des transformées de Fourier, les convolutions se transforment en produits. Dans l'égalité écrite ci-dessous, -i $sgn(\lambda)$ est affecté, par exemple, à *F(x)* :

$$\boldsymbol{\mathcal{F}(H(x * y) = -isgn(\lambda)\mathcal{F}(x * y) = -isgn(\lambda)\mathcal{F}(x) * \mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(H_X)F(y)}$$

En composant par la transformation de Fourier inverse, on obtient une des relations. En affectant $-isgn(\lambda)$ à $\mathcal{F}(y)$, on obtient l'autre relation.

5 QUELQUES APPLICATIONS

En utilisant (a) comme prérequis, nous parlons de la causalité en (b).

a) Le module du signal analytique Z_X est dit, par définition, l'enveloppe du signal *x* ou module instantané de *x*. L'argument du signal analytique est appelé phase instantanée de *x* et la dérivée de cette dernière est la pulsation instantanée[1][5][8][9][15][17][24].

Avec nos deux exemples $t \to cost\ et\ t \to Acos(wt + \alpha)$, nous déterminons l'enveloppe, la phase instantanée et la pulsation. Déduisons que ces définitions coïncide pour ces deux cas à l'amplitude et à la phase des fonctions complexes habituellement associées à ces deux fonctions périodiques. De ces résultats, on calcule l'enveloppe, la phase instantanée, la pulsation instantanée pour la fonction $t \to \sin(wt + \alpha)$ puis la fonction $t \to 2C\sin\mathrm{c}(2Ct)$, où sinc désigne le sinus cardinal.

En effet, on a vu ci-dessus que le signal analytique associé à cos(t) était e^{it}. Le module est égale à 1 et la phase instantanée est t dont la dérivée est égale à 1. Il est facile de calculer H_X lorsque $x(t) = Acos(wt + \alpha)$; on en déduit que l'enveloppe de ce signal *w* est A (on suppose $A > 0$) et que la phase instantanée est $wt + \alpha$; la dérivée de cette phase est *w*, c'est bien la pulsation de *x*. Les définitions données sont bien cohérentes avec ces cas bien connus. Dans le cas de $t \to \sin(wt + \alpha)$, on trouve facilement que le module est 1 et que la phase est $wt + \alpha + \frac{\pi}{2}$, de dérivée *w*, pulsation instantanée.

Pour $x: t \to 2Csinc(2Ct)$, on se sert de résultats : $\lambda \to sinc(\lambda) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}$. Cette fonction est dilatée de sinc, donc, sachant que cette fonction est réelle et paire, on a : $\hat{x}(\lambda) = \Pi(\frac{\lambda}{C})$ et, grâce à la formule précédente, on a la transformée de Fourier de H_X :

$$\boldsymbol{\mathcal{F}(H_x) = -isgn(\lambda).\Pi\left(\frac{\lambda}{C}\right)} = \begin{cases} \boldsymbol{-i} & \forall\boldsymbol{\lambda} \in [\mathbf{0}, \boldsymbol{C}] \\ \boldsymbol{i} & \forall\boldsymbol{\lambda} \in [-\boldsymbol{C}, \mathbf{0}] \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{si\ non} \end{cases}$$

On en déduit, par la formule de réciprocité [22][24][25]:

$$\boldsymbol{H_x(t) = -i\int_0^C e^{2i\pi\lambda t}\, d\lambda + i\int_{-C}^0 e^{2i\pi\lambda t}\, d\lambda}$$

Après les calculs, nous obtenons :

$$\boldsymbol{H_x(t) = \frac{2}{\pi t} sin^2(\pi t C)}$$

Le signal analytique Z_X est alors défini par :

$$\boldsymbol{Z_X = x + iH_X = 2Csinc(Ct)\, e^{i\pi Ct}}$$

d'où l'on déduit que l'enveloppe de *x* est la fonction $t \to 2Csinc(Ct)$. La phase instantanée est πCt, la pulsation instantanée est donc πC.

b) La causalité est une propriété importante des filtres ; elle signifie que l'effet ne peut apparaitre avant la cause. D'ailleurs, si cette propriété n'est pas vérifiée, on dit que le filtre n'est pas physiquement réalisable. On démontre que cette causalité exige que h, réponse impulsionnelle du filtre, vérifie la condition :

$$\boldsymbol{h(t) = 0 \quad si\ t < 0}$$

De ce fait, nous montrons que cette condition est équivalente à :

$$\boldsymbol{h(t) = h(t)u(t)}$$

pour tout t réel. En admettant qu'on puisse utiliser les propriétés de Fourier relativement à la convolution, nous montrons que cette condition est équivalente au fait que la réponse en fréquences du filtre,, que l'on notera ici plutôt G, soit un vecteur propre de la transformation de Hilbert H (avec H(G) proportionnel à G). Enfin, soient A et B les fonctions partie réelle et partie imaginaire de G, réponse en fréquences du filtre, montrons que la causalité est réalisée si et seulement si, à un signe près, ces fonctions sont transformées de Hilbert l'une de l'autre [17][19][22][23][24].

En réponse, ayant admis la propriété habituelle de *F* sur la convolution, la relation vérifiée $\forall t\ (réel)$:

$$\boldsymbol{h(t) = h(t)u(t)}$$

donne :

$$\boldsymbol{G(\lambda) = G(\lambda)F(u) = G(\lambda) * (\frac{\delta}{2} + \frac{1}{2i\pi} V_p(\frac{1}{\lambda}))}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{G(\lambda) = \frac{1}{i\pi} G(\lambda) * V_p(\frac{1}{\lambda})}$$

c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{G(\lambda) = \frac{1}{i\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} (\int_{\lambda+\varepsilon}^{+\infty} \frac{G(u)}{\lambda - u} du + \int_{-\infty}^{\lambda+\varepsilon} \frac{G(u)}{\lambda - u} du)}$$

En fait, on peut exprimer cette propriété par l'égalité : $H(G) = iG$, ce qui veut dire que la réponse en fréquence est vecteur propre de la transformation de Hilbert H avec la valeur propre i.

Si on pose *G=A+iB* où A et B sont les parties réelles et imaginaires de G, la traduction de la relation précédente donne ***H(A)+iH(B)=i(A+iB)*** [7][23]**.**

On en tire les relations *A=H(B) et B=-H(A)* ; autrement dit, les parties réelles et imaginaires sont transformées de Hilbert l'une de l'autre (au signe près)[3][13][15][17][22][25].

ACKNOWLEDGMENT

I would like to thank the Director of my Ph.D thesis, NTANTU IBULA Donatien Ordinary Professor for his advice during the writing of this article.

REFERENCES

[1] S.M. Ali, S.D Silvey, 1966, *a general class of coefficients of divergence of one distribution from another*. Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Meyhodological)
[2] C. Berg, JP.R Christensen, P. Ressel, 1984, *Harmonic analysis on Semigroup*, Spring Verlag, New York
[3] A. Berlinet, C. Thomas-Argnan, 2004, *Reproducting Kernel Hilbert Spaces in Probability and Statistics*, Kluwer academic Publishers, London, UK
[4] Bhattacharyya, Paulink, 2012, *Distributions: generalized functions with applications in Sobolov spaces*, Walter de Gruyter GmbH&Co. KG, Berlin/Bolton
[5] P. Bremaud, 2001, *Mathematical Principles of signal processing*, Springer-Verlag, New York
[6] R.M. Dudley, 2002, *Real Analysis and Probability*, Cambridge University Press, Cambridge, UK
[7] G.B. Folland, 1999, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* Wiley-Interscience, New York
[8] B. Fuglede, F. Topsoe, Jensen-Shannon, 2003, *Divergence and Hilbert Space Embedding,* Preprint
[9] C. Gasquet, Witomski, 1999, *Fourier Analysis and Applications,* Springer-Verlag, New York
[10] A. Gretton, A. Smola, O. Bousquet, Herbrich, Belistski, Augath, Murayama, Pauls, Schölkopf, Logothetis, 2005, *Kernel constrained covariance for dependence measurement.* In Z. Ghahramani and R. Cowell, editors, Proc. 10th International Workshop on Artificial Intelligence and Statistics
[11] A. Gretton, K. Fukumizu, CH. Teo, Schölkopf, A. Smola, 2007, *A Kernel method for the two sample problem.* In B. Schölkopf, J. Platt, and T. Hoffman, editors, Advances in Neural Information Processing Systems
[12] A. Gretton, K. Fukumizu, CH. Teo, Schölkopf, A. Smola, 2008, *A Kernel statistical test of independance.* In J. Platt, D. Koller, Y. Singer, and S. Roweis, editors, Advances in Neural Information Processing Systems 20
[13] R. Courant, D. Hilbert, 1975, *Methods of Mathematical Physics. Vol 2*, New Delhi: Wiley Eastern Private Ltd
[14] F. Liese, I. Vajda, 2006, *On divergences and informations in statistics and information theory.* IEEE Trans. Information Theory
[15] T. Lindvall, 1992, *Lectures on the coupling method*, John Wiley & Sons, New York
[16] C.A. Micchelli, Y. Xu, H. Zhang, Universal Kernels, 2006, *Journal of Machine Learning research*
[17] M. Reed, B. Simon, 1980, *Methods of modern mathematical physics: Functions Analysis I.* Academic Press, New York
[18] W. Rudin, 1991, *Functionnal Analysis*, McGraw-Hill, USA
[19] A.J. Smola, A. Gretton, L. Song, B. Scholkopf, 2007, *Hilbert Space embedding for distributions. In Proc. 18th International Conference on Algorithmic Learning Theory*, Spring-Verlag, Berlin, Germany
[20] L. Schwartz, 1966, *Théorie des Distributions*, Paris Hermann
[21] J.C. Nedlec, 1966, *Notions sur les équations intégrales de la physique : théorie et approximation Palaiseau*, France : Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique
[22] S. Mallat, 2011, *une exploration des signaux en ondelettes*, Ed. de la polytechnique
[23] E. Roubine, 1990, *Distributions-Signal*, Eyrolles
[24] C., Zuily, 2010, *Problèmes de Distributions*, Cassini
[25] C., Zuily, 2010, *Distributions et Equations aux dérivées partielles*, Paris Hermann.