International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 11 No. 1 Apr. 2015, pp. 69-76

http://www.ijias.issr-journals.org/

Existence et Unicité des Solutions Faibles du Problème de Steklov

[Existence and uniqueness of weak solution for weighted p-Laplacian Steklov problem]

BASSAM AL-HAMZAH and NAJI YEBARI

Département de Mathématiques et Informatique,
Université Abdelmalek Essaadi,
Faculté des Sciences,
Tetouan, Maroc

ABSTRACT: This paper deals with the equation Steklov. The existence and uniqueness results are obtained by Browder Theorem. Our paper is organized as follow: Section 0.2 contains some basic definitions concerning the nonlinear operators that will be used throughout the paper. Also, we introduce the space setting of the problem and give some basic characteristics, as the equivalent norm and imbedding results. In section 0.3 we state the main result on the existence and uniqueness of weak solutions of the problem (P). (S. A. Khafagy 2011).

KEYWORDS: Weak solutions, weighted p-Laplacian, Steklov problem.

0.1 Introduction

On étudiera dans cet article l'existence et unicité des solutions faibles du problème de Steklov formulé par :

$$(P)\begin{cases} \Delta_p u = |u|^{p-2}u & \text{dans } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(x,u) & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de carathéodory satisfaisant :
(H_1) $f(x,s_1) \leq f(x,s_2)$ p.p $x \in \partial\Omega$ et $\forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, tel que $s_1 \geq s_2$.
(H_2) $|f(x,s)| \leq f_0(x) + c|s|^{p-1}$ p.p. $x \in \partial\Omega$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$
avec $f_0 \in L^{p'}(\partial\Omega)$, et $c > 0$.
L'existence de valeurs propres pour le problème (P) (voir [3,4]).

0.2 Définitions et Préliminaires

0.2.1 Théorème de Browder

Définition 0.2.1 *Soient V un espace de Banach et $A : V \to V'$ un opérateur, on dit que A est :*

1) Borné si et seulement si A envoie les bornés en des bornés c'est à dire pour tout $r > 0$ il exist $M > 0$, tel que $\|A(u)\| \leq M$, pour tout $u \in V$, $\|u\| \leq r$.

2) Coercive si et seulement si $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle A(u),u\rangle}{\|u\|} = \infty$.

3) Strictement monotone si et seulement si

$$\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2\rangle > 0, \forall u_1, u_2 \in V, u_1 \neq u_2.$$

4) Fortement monotone si et seulement si il exist $k > 0$ tel que:

$$\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2 \rangle \geq k\|u_1 - u_2\|, \forall u_1, u_2 \in V, u_1 \neq u_2.$$

5) Complètement continue si et seulement si $u_n \rightharpoonup u \Rightarrow A(u_n) \to A(u), \forall u_n, u \in V$.
6) Continue si et seulement si $u_n \to u \Rightarrow A(u_n) \to A(u), \forall u_n, u \in V$.
7) Demi-continue si et seulement si $u_n \to u \Rightarrow A(u_n) \rightharpoonup A(u), \forall u_n, u \in V$.

Théorème 0.2.1 *(Browder)*
Soit V un espace de Banach réflexif et $A : V \to V'$ un opérateur est borné, demi-continue, coercive et monotone sur l'espace V. Alors pour tout $f \in V'$ l'équation $A(u) = f$ admet au moins une solution dans V. Si de plus A est un opérateur strictement monotone, alors pour tout $f \in V'$ l'équation $A(u) = f$ admet une solution unique dans V.

0.3 Résultats d'existence et d'unicité

Définition 0.3.1 *On dit que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est une solution faible du problème (P) si*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi dx + \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx = \int_{\partial\Omega} f(x,u)\varphi dx,\ \ \forall\varphi \in W^{1,p}(\Omega).$$

Théorème 0.3.1 *Soit $p \geq 2$, et f est une fonction de carathéodory vérifiant les conditions (H_1) et (H_2). Alors le problème (P) possède une unique solution faible.*

Preuve:
On définit l'opérateur $A : W^{1,p}(\Omega) \to (W^{1,p}(\Omega))'$, $A = J - F$, où les opérateurs $J : W^{1,p}(\Omega) \to (W^{1,p}(\Omega))'$, et $F : W^{1,p}(\Omega) \to (W^{1,p}(\Omega))'$ sont donnés par

$$\langle J(u), \varphi\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi dx + \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx$$

et

$$\langle F(u), \varphi\rangle = \int_{\partial\Omega} f(x,u)\varphi dx$$

pour tout $u, \varphi \in W^{1,p}(\Omega)$. Sous la condition (H_2), il est connu que A est de classe C^1 sur $W^{1,p}(\Omega)$ et les points de critiques de A sont les solutions faibles de P, inversement. Maintenant, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution faible de (P) .
Nous avons les propriétés suivantes de l'opérateurs J et F
a) J et F sont bien définis, en effet

$$\langle J(u), \varphi\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi dx + \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx$$

D'après l'inégalité de Hölder

$$|\langle J(u),\varphi\rangle| \leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla\varphi|dx + \int_\Omega |u|^{p-1}|\varphi|$$

$$\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

De même, pour

$$\langle F(u),\varphi\rangle = \int_{\partial\Omega} f(x,u)\varphi dx$$

et il est d'aprés (H_2),que

$$|\langle F(u),\varphi\rangle| \leq \int_{\partial\Omega} |f(x,u)\varphi|dx \leq \int_{\partial\Omega} (f_0(x)+c|u|^{p-1})|\varphi|dx$$

D'après l'inégalité de Hölder,

$$|\langle F(u),\varphi\rangle| \leq \left(\int_{\partial\Omega} |f_0(x)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\partial\Omega} |\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}} + c\left(\int_{\partial\Omega} |u|^p\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\partial\Omega} |\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Donc J et F sont bien définis.

b) J et F sont bornés, en effet
pour chaque u telle que $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq M$

$$\|J(u)\|_{(W^{1,p}(\Omega))'} = \sup_{\|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)}\leq 1} |\langle J(u),\varphi\rangle| \leq \sup_{\|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)}\leq 1} \left(\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla\varphi|dx + \int_\Omega |u|^{p-1}|\varphi|\right) dx.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder

$$\|J(u)\|_{(W^{1,p}(\Omega))'} = \sup_{\|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)}\leq 1} \left(\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$= \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \left(\|\nabla u\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}}\|\varphi\|_{L^p} + \|u\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}}\|\varphi\|_{L^p}\right)$$

$$\leq \|\nabla u\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}} + \|u\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}} \leq \|u\|^{\frac{p}{p'}} + \|u\|^{\frac{p}{p'}}$$

$$2\|u\|^{\frac{p}{p'}} \leq 2M^{\frac{p}{p'}}.$$

Pour F, on obtient

$$\|F(u)\|_{(W^{1,p}(\Omega))'} = \sup_{\|\varphi\|_{W^{1,p}(\partial\Omega)}\leq 1} |\langle F(u),\varphi\rangle| \leq \sup_{\|\varphi\|_{W^{1,p}(\partial\Omega)}\leq 1} \int_{\partial\Omega} (f_0(x)+c|u|^{p-1})|\varphi|$$

$$\leq \sup_{\|\varphi\|_{W^{1,p}(\partial\Omega)}\leq 1} [\left(\int_{\partial\Omega} |f_0(x)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_{\partial\Omega} |u|^{(p-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}}] \left(\int_{\partial\Omega} |\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Puisque $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\partial\Omega)$, il rèsulte que l'opérateur F est borné.

c) J et F opérateurs sont continus si $u_n \to u$, dans $W^{1,p}(\Omega)$. Alors nous avons

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0,\ \|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^p(\Omega)} \to 0, \|u_n - u\|_{L^p} \to 0$$

Appliquons le théorème de convergence dominée

$$\|(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\|_{L^p(\Omega)} \to 0$$

et

$$\|(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)\|_{L^p(\Omega)} \to 0$$

d'où

$$\|J(u_n) - J(u)\|_{(W^{1,p}(\Omega))'} = \sup_{\|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)}\leq 1} |\langle J(u_n) - J(u), \varphi\rangle|$$

$$\leq \sup_{\|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)}\leq 1} \left(\left(\int_\Omega \left(\left[|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right]\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\left. + \left(\int_\Omega \left(\left(\left[|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right)\right]\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

De la même façon, nous avons

$$\|F(u_n) - F(u)\|_{(W^{1,p}(\partial\Omega))'} = \sup_{\|\varphi\|_{W^{1,p}(\partial\Omega)}\leq 1} |\langle F(u_n) - F(u), \varphi\rangle|$$

$$\leq k \left(\int_{\partial\Omega} |f(x,u_n) - f(x,u)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

d) Soit $p \geq 2$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on a l'inégalité suivante

$$|x_2|^p \geq |x_1|^p + p|x_1|^{p-2}x_1(x_2 - x_1) + \frac{|x_2 - x_1|^p}{2^{p-1} - 1}. \tag{1}$$

Maintenant,

$$\langle J(u) - J(\varphi), u - \varphi\rangle = \int_\Omega \left[|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi\right] (\nabla u - \nabla\varphi)$$

$$+ \int_\Omega \left[|u|^{p-2}u - |\varphi|^{p-2}\varphi\right] (u - \varphi)$$

$$= \int_\Omega [|\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla u - \nabla\varphi)] - \int_\Omega [|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi(\nabla u - \nabla\varphi)]$$

$$+\int_\Omega [|u|^{p-2}u(u-\varphi)] - \int_\Omega [|\varphi|^{p-2}\varphi(u-\varphi)] = I_1 + I_2.$$

En utilisant (1), on obtient

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &\geq \frac{2}{p(2^{p-1}-1)} \int_\Omega |\nabla u - \nabla\varphi|^p dx + \frac{2}{p(2^{p-1}-1)} \int_\Omega |u-\varphi|^p dx \\ &\geq c(p)\left(\|\nabla u - \nabla\varphi\|^p_{L^p(\Omega)} + \|u-\varphi\|^p_{L^p(\Omega)}\right) \\ &= c(p)\|u-\varphi\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}, \text{ pour } p \geq 2. \end{aligned}$$

Donc

$$\langle J(u) - J(\varphi), u-\varphi\rangle \geq c(p)\|u-\varphi\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \text{ pour } p \geq 2. \tag{2}$$

De la même façon, nous avons

$$\langle F(u) - F(\varphi), u-\varphi\rangle = \int_{\partial\Omega} [f(x,u) - f(x,\varphi)](u-\varphi).$$

Comme f est décroissante par rapport à la seconde variable, on obtient

$$[f(x,u) - f(x,\varphi)](u-\varphi) \leq 0.$$

Donc, il suit

$$\langle F(u) - F(\varphi), u-\varphi\rangle = \int_{\partial\Omega} [f(x,u) - f(x,\varphi)](u-\varphi) \leq 0. \tag{3}$$

Les équations (2) et(3) impliquent que

$$\langle A(u) - A(\varphi), u-\varphi\rangle \geq c(p)\|u-\varphi\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \text{ pour } p \geq 2. \tag{4}$$

Donc A est fortement monotone.

Pour appliquer le théorème Browder, il reste à prouver que A est un opérateur coercif. De (4), on obtient

$$\langle A(u), u\rangle \geq \langle A(0), u\rangle + c(p)\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

En revanche

$$\begin{aligned} \langle A(0), u\rangle &= \langle J(0), u\rangle - \langle F(0), u\rangle \\ &= -\int_{\partial\Omega} f(x,0)u \\ &\geq -(\int_{\partial\Omega} [f_0(x)]^{p'})^{\frac{1}{p'}} (\int_{\partial\Omega} |u|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq -k\|f_0\|_{L^{p'}(\partial\Omega)}\|u\|_{W^{1,p}(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\langle A(u), u\rangle \geq c(p)\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} - k\|f_0\|_{L^{p'}(\partial\Omega)}\|u\|_{W^{1,p}(\partial\Omega)}.$$

Donc

$$\lim_{\|u\|_{W^{1,p(\Omega)}}\to\infty} \frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|_{W^{1,p(\Omega)}}} = \infty.$$

Cela prouve l'état de coercivité et ainsi de l'existence d'une solution faible de (P). L'unicité de la solution faible de (P) est une conséquence direct de (4) supposer que u, φ deux solutions faible de (P) telle que $u \neq \varphi$. Maintenant, à paritir de (4), nous avons

$$0 = \langle A(u) - A(\varphi), u - \varphi\rangle \geq c(p)\|u - \varphi\|^p_{W^{1,p(\Omega)}} \geq 0.$$

Donc $u = \varphi$ ce ci termine la preuve. ■

REMERCIEMENTS

L'auteur tient exprimer sa gratitude au Professeur ABDEL RACHID EL AMROUSS (Université Mohamed Premier, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques et Informatique) pour l'encouragement continu lors de l'laboration de ce travail.

Références

[1] *S. A. Khafagy*, Existence and uniqueness of weak solution for weighted p-Laplacian Dirichlet problem, Vol. 3, 2011, Online ISSN : 1943-023X, Jouranal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems.

[2] *S. A. Khafagy*, Existence and Uniqueness of Weak Solution for Quasilinear Elliptic (p, q)-Laplacian System. Global Journal of Pure and Applied Mathematics. ISSN 0973-1768 Volume 8, Number 4 (2012), pp. 465475.

[3] *A. Anane, O. Chakrone, B. Karim, A. Zerouali*, Eigencurves for a Steklov problem. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2009(2009), No. 75, pp. 18. ISSN: 1072-6691.

[4] *O. Torné*, Steklov problem with an indefinite weight forthe p-Laplacian, Vol. 2005(2005), ISSN : 1072-6691 Electronic Journal of Differential Equations.