

## Calcul mathématique des courbes de remous dans les canaux découverts de profil non prismatique par intégration directe (méthode de bakhmeteff)

### [ Mathematical calculation of the backwater curves in open channels of non-prismatic profile by direct integration (method bakhmeteff) ]

*A. Goubaa and A. Fourar*

Department of Hydraulic,  
Hadj Lakhdar University, Batna  
Algeria

---

Copyright © 2014 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the *Creative Commons Attribution License*, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

**ABSTRACT:** In this work we have presented aims to study the calculation backwater curves for gradually varied flow with a free surface in open channels of non-prismatic profile with the use of mathematical methods, which allow drawing the line water to various sections, and specifying the general appearance of the different forms of the water surface. The proposal has many advantages and disadvantages, role being the knowledge of the construction works on the water level upstream the passage of a flood, to assess and reduce the risk of flooding. After the definition of modeling resolution, we need to apply the characteristics of non-prismatic channels. This project presents a study of mathematical calculation (Method Bakhmeteff) with different sections chosen because they are shorter and less complicated than other methods.

**KEYWORDS:** water surface, modeling, flow, risk of flooding, section.

**RESUME:** L'objectif du travail que nous avons présenté est l'étude du calcul les courbes de remous pour les écoulements graduellement variés à surface libre dans les canaux découverts de profil non prismatique, avec l'utilisation des méthodes mathématiques, qui permettent de tracer la ligne d'eau à de diverses sections, et de préciser l'aspect général des différentes formes de la surface d'eau. La proposition a de nombreux avantages et inconvénients, le rôle étant la connaissance de la construction des ouvrages sur le niveau de l'eau en amont au passage d'une crue, pour évaluer et éviter les risques d'inondations. Après la définition du modèle de résolution, on nécessite d'appliquer les caractéristiques des canaux non prismatiques. Ce projet présente une étude de calcul mathématique (Méthode de Bakhmeteff) avec de différentes sections choisies, puisqu'elles sont moins longues, et moins compliquées que les autres méthodes.

**MOTS-CLEFS:** surface d'eau, modelé, écoulements, risques d'inondations, sections.

## 1 INTRODUCTION

La connaissance et le calcul des courbes de remous pour les écoulements graduellement variés à surface libre dans les canaux découverts présentent un très grand intérêt tant industriel, qu'économique occupent une place importante dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien. Cette opération permet de poser un problème de déterminer la position,  $x$ , et la forme,  $h(x)$ ,  $B(x)$ , de la surface libre pour un débit ( $Q$ ), et une forme géométrique de section ( $S$ ) donnés.

Ce problème désigné par courbe de remous, consiste l'intégration de l'équation différentielle simplifiée de Saint Venant qui s'impose des méthodes de calculs reposant sur le même principe et visant le même objectif de déterminer la profondeur

finale de l'écoulement se produisant sur un tronçon du canal donné. Mais avant d'examiner ces méthodes d'intégration, il convient d'analyser qualitativement les formes des courbes de remous.

Dans l'écoulement graduellement varié, l'équation de la surface d'eau permet de tracer les formes de la surface libre (ligne d'eau), par les différents cas possibles, le calcul et la construction exacte de ces formes nécessitent l'intégration de l'équation différentielle de l'écoulement graduellement varié des canaux non prismatique. Dans le cas général on utilise diverses méthodes mathématiques ou graphiques.

L'application de ces méthodes de calcul ne donnera qu'un résultat de l'équation de la ligne d'eau à un constant pré. Il est toutefois évident que la position de cette ligne par rapport au fond du canal est unique n'est pas arbitraire ; pour lever l'indétermination il faudra obligatoirement connaître l'un de ces points ; appelé point de repère, ou de contrôle, sera généralement calculable à partir des propriétés hydrauliques de la singularité qui est à l'origine de mouvement graduellement varié considéré.

## **2 EQUATION SIMPLIFIEE DE SAINT VENANT**

Dans un écoulement graduellement varié, l'application des équations de Saint Venant permet de calculer les hauteurs d'eau et les vitesses moyennes le long de la direction d'écoulement en fonction du temps. Ces équations sont l'ensemble d'équation de continuité et l'équation dynamique de mouvement après des simplifications, et les solutions en sont souvent extrêmement compliquées. Dans certains cas physiquement simples mais réalistes, explicites sont possible.

Dans le cas général l'équation dynamique pour un écoulement non permanent et non uniforme dans un canal découvert ce donne comme suit :

$$\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} - J_f = -J_e \quad (1)$$

Où :

$J_f$  : Pente du fond.

$J_e$  ; Pente énergétique.

$h$  : la hauteur moyenne ou la profondeur hydraulique dans la section(m).

$U$  : vitesse moyenne dans la section (m/s).

$g$  : accélération gravitationnelle (m/s<sup>2</sup>).

$t$  : temps (s).

L'étude d'un écoulement permanent et non uniforme rend l'équation (1) se forme:

$$\frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} - J_f = -J_e \quad (2)$$

Peut aussi s'écrire ainsi :

$$\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{s} \right) + S \frac{\partial h}{\partial x} + S \frac{\partial z}{\partial x} = -S J_e \quad (3)$$

Où :

$Z$  ; la cote du fond de canal

$S$  : surface (m).

## **3 EQUATION DE LA SURFACE LIBRE**

La dérivation de l'équation d'énergie par rapport a  $x$  et lorsque on utilise une relation de type Chézy fonction de  $x$  et de  $h$  donne :

$$\frac{d}{dx} \frac{(Q/S)^2}{2g} + \frac{dh}{dx} - J_f = -J_e = -\frac{(Q/S)^2}{C^2 R_h} \quad (4)$$

Où :

$R_h$  : Rayon hydraulique (s/p).

$C$  : coefficient de Chéz ( $m^{1/2}/s$ ).

A noter que l'équation (4), tout comme l'équation (3), est l'équation simplifiée de Saint Venant ; elle est valable pour les canaux prismatiques et non prismatiques. Si le canal est non prismatique  $S = f(h(x), x)$  et  $\frac{dS}{dx} = B$  dont la pente où la géométrie de section variante dans la direction longitudinale du canal.

Par cette définition on exprime le premier terme de l'équation (4) par :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{Q^2}{2 S^2 g} \right) = \frac{Q^2}{2g} \left( - \frac{2}{S^3} \frac{dS}{dx} \right) = - \frac{Q^2}{g S^3} \left( \frac{dS}{dh} \frac{dh}{dx} + \frac{dS}{dx} \Big|_{h=cte} \right) \quad (5)$$

Cette équation constitue une équation différentielle du premier ordre. S'écrit par conséquent:

$$- \frac{(Q/S)^2}{g s} \left( \frac{dS}{dh} \frac{dh}{dx} + \frac{dS}{dx} \right) + \frac{dh}{dx} - J_f = - \frac{(Q/S)^2}{c^2 R_h} \quad (6)$$

Elle permet de déterminer la profondeur d'eau  $h(x)$ , en fonction de la distance  $x$ , par un débit  $Q$ , donné.

Après des simplifications j'obtiens une équation différentielle de l'écoulement graduellement varié des canaux non prismatiques de forme :

$$\frac{dh}{dx} = J_f \frac{1 - \frac{(Q/S)^2}{c^2 R_h J_f} + \frac{(Q/S)^2}{g S J_f} \frac{dS}{dx}}{1 - \frac{(Q/S)^2}{S g} B} \quad (7)$$

Où le terme  $\frac{(Q/S)^2}{g S J_f} \frac{dS}{dx}$  exprime le changement de section (largeur au miroir).

Cette équation permet de définir l'inclinaison (pente) par rapport au fond du canal et non pas la pente de la ligne d'eau, et la profondeur,  $h$ , pas la cote. Prend la valeur positive si la profondeur d'eau,  $h$ , croît et négative dans le cas contraire.

L'équation de l'écoulement graduellement varié équation (7) peut aussi être écrite en utilisant la notion de la débitance :

$$K(h) = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S = C R_h^{1/2} S \quad (8)$$

Où  $K(h)$  est la débitance, représente uniquement une fonction de la profondeur d'écoulement  $h$ , équivalent à la profondeur normale,  $h_n$ , déterminée comme suit :

Pour l'écoulement uniforme, cette relation prend la valeur suivante :

$$K_n(h) = \frac{Q}{\sqrt{J_f}} \quad (9)$$

Lorsque la vitesse moyenne donnée par la formule de Manning dans sa forme particulière. On a donc

$$Q = \frac{1}{n} R_h^{2/3} J_f^{1/2} S \quad (10)$$

On compare l'égalité (8) et (10) on obtient :

$$Q = K(h) J_f^{1/2} \quad (11)$$

Où

$$Q / \sqrt{J_f} = f(h) \quad (12)$$

Peut-être tracer point par point pour une forme de section donnée.

La débitance  $K$ , caractérise le canal, elle représente une mesure de la capacité de transport d'eau dans cette section.

La pente critique d'un canal, quelle qu'en soit sa forme, peut être calculée par

$$J_c = \frac{g S}{c^2 R_h B} \quad (13)$$

Donc l'expression dans le dénominateur de l'équation différentielle équation (7), peut alors être exprimée ainsi :

$$\frac{Q^2}{g S^3} B = \frac{Q^2}{c^2 S^2 R_h J_f} \frac{c^2 S^2 R_h J_f}{g S^3 / B} = \frac{(Q/\sqrt{J_f})^2}{(c S R_h^{1/2})^2} \frac{J_f}{g S / c^2 B R_h} = \frac{K_n^2 J_f}{K^2 J_c}$$

En utilise les trois relations des équations (13) et (8)-(9) pour exprimer le numérateur d'équation (7).

$$\frac{Q^2}{g S^3 J_f} = \frac{Q^2}{c^2 S^2 R_h J_f} \frac{c^2 S^2 R_h J_f}{g S^3 J_f} = \frac{(Q/\sqrt{J_f})^2}{(c S R_h^{1/2})^2} \frac{c^2 R_h}{g S} = \frac{K_n^2}{K^2} \frac{c^2 R_h}{g S}$$

Par cette définition nous avons proposé de multiplier et diviser ce terme par la largeur de miroir (B), ainsi on obtient :

$$\frac{K_n^2 c^2 R_h B}{K^2 g S} \frac{1}{B} = \frac{K_n^2}{K^2} \frac{1}{J_c B}$$

$$\frac{(Q/S)^2}{c^2 R_h J_f} = \frac{Q^2}{c^2 S^2 R_h J_f} = \frac{(Q/\sqrt{J_f})^2}{(c S R_h^{1/2})^2} = \frac{K_n^2}{K^2}$$

Donc l'équation (7) devient :

$$\frac{dh}{dx} = J_f \frac{1 - \left(\frac{K_n}{K}\right)^2 + \left(\frac{K_n}{K}\right)^2 \frac{1}{J_c B} \frac{ds}{dx}}{1 - \left(\frac{K_n}{K}\right)^2 \frac{J_f}{J_c}} \tag{14}$$

Forme générale de l'équation de mouvement des canaux non prismatiques.

#### 4 FORME DE LA SURFACE D'EAU

Dans les écoulements graduellement variés les différentes courbes intégrales obtenue par l'équation (7) en fonction de la pente du fond  $J_f$  qui définit leurs classification pour un débit  $Q$  donné.

Ces courbes ne cherchent pas à donner une solution explicite mais on s'intéresse à donner les formes semi quantitatives de la variation de la profondeur ,  $h$ , avec la distance  $x$  par des conditions à la limite permet de tracer la surface d'eau pour les différents cas possibles. On distingue les cinq cas suivants. :

**Tableau 1. Les classifications de la ligne d'eau**

$J_f > 0$	$J_f < J_c$	Canaux à pente faible	M
	$J_f > J_c$	Canaux à pente forte	S
	$J_f = J_c$	Canaux à pente critique	C
$J_f = 0$	Canaux a pente zéro		H
$J_f < 0$	Canaux a contre pente		A

Chaque courbe comporte différentes branches qui donnent leur ensemble ne représentant pas une ligne réelle de la surface d'eau, mais plutôt un ensemble de divers cas possibles. Une surface d'eau réelle est alors représentée par une seule branche.

#### 5 MÉTHODE PAR INTEGRATION DIRECTE

Cette méthode est plus valable et directe quelle que soit la distance entre ces sections, que la méthode par approximation successive qui passe d'une section à l'autre d'une petite distance. L'intégration de l'équation différentielle du mouvement dans les canaux non prismatiques en forme générale permet de calculer et tracer la surface d'eau, si on connaît le débit  $Q$ , la pente du fond  $J_f$ , et le coefficient de frottement  $n$  ou  $c$ , par conséquent les variables sont l'abscisse  $x$ , largeur  $B$ , et la profondeur d'eau  $h$ , correspondent. Pour quelques sections du canal, tel que la forme rectangulaire, trapézoïdale, triangulaire et parabolique.

**5.1 METHODE DE BAKHMETEFF**

Cette méthode plus utilisée à des canaux de section transversale de forme quelconque. Pour le Calcul des courbes de remous, elle est assez longue à utiliser mais elle est précise à condition d'adopter des intervalles d'intégration suffisamment petits.

L'expression de la débitance K pour un tel canal est donnée par l'équation (8) on peut exprimer par une relation exponentielle :

$$K^2 = C^2 R_h S^2 = C^{te} h^N \tag{15}$$

Par cette définition le rapport  $(\frac{K}{K_n})^2$  donne :

$$\left(\frac{K}{K_n}\right)^2 = \frac{C^2 R_h S^2}{(C^2 R_h S^2)_n} = \left(\frac{h}{h_n}\right)^N \tag{16}$$

Où :

$h_n$  : Profondeur normal

N : exposant hydraulique, qui est à déterminer pour chaque forme de canal.

On suppose que le rapport

$$\frac{J_f}{J_c} = \beta = J_f \frac{C^2 B R_h}{g S} \tag{17}$$

Si on considère comme une constante dans un tronçon. L'équation différentielle équation (14) écrit alors :

$$\frac{dh}{dx} = J_f \frac{1 - (\frac{h_n}{h})^N + (\frac{h_n}{h})^N \frac{1}{J_c B} \frac{dS}{dx}}{1 - \beta (\frac{h_n}{h})^N} \tag{18}$$

**5.1.1 SECTION RECTANGULAIRE**

$$S = Bh \Rightarrow \frac{dS}{dx} = \frac{dB}{dx} h \tag{19}$$

$$dx = \frac{1}{J_f} \frac{-\left(\frac{h_n}{h}\right)^N \frac{J_f}{J_c} \frac{dB}{B} h + dh \left(1 - \left(\frac{h_n}{h}\right)^N \frac{J_f}{J_c}\right)}{1 - \left(\frac{h_n}{h}\right)^N} \tag{20}$$

En posant  $h/h_n = \eta$  ,  $dh = h_n d\eta$  et  $\frac{J_f}{J_c} = \beta$

En intégrant cette relation entre deux sections d'abscisses  $x_i$  et  $x_{i+1}$  et en admettant  $\beta$  et N comme constante, on obtient :

$$\int_{x_{i+1}}^{x_i} dx = \frac{-\beta h}{J_f (\eta^{N-1})} \int_{B_{i+1}}^{B_i} \frac{dB}{B} + \frac{h_n}{J_f} \int_{\eta_{i+1}}^{\eta_i} \left[1 + \frac{1-\beta}{\eta^{N-1}}\right] d\eta \tag{21}$$

$$(x_i - x_{i+1}) = \frac{-\beta h}{J_f (\eta^{N-1})} [\ln B_i - \ln B_{i+1}] + \frac{h_n}{J_f} [(\eta_i - \eta_{i+1}) - (1 - \beta)(\Phi(\eta_i) - \Phi(\eta_{i+1}))] \tag{22}$$

Avec l'intégrale

$$\Phi(\eta \cdot N) = - \int \frac{d\eta}{\eta^{N-1}} \tag{23}$$

Forme générale pour section rectangulaire :

- $B \ll h \quad N = 2.0$
- $B = 2h \quad N = 2.5$
- $B = \infty \quad N = 3.0$

**5.1.2 SECTION TRAPÉZOÏDALE**

$$S = (B - mh)h = Bh - m h^2 \Rightarrow \frac{dS}{dx} = \frac{dB}{dx} h \tag{24}$$

$$(x_i - x_{i+1}) = \frac{-\beta h}{J_f (\eta^{N-1})} [\ln B_i - \ln B_{i+1}] + \frac{h_n}{J_f} [(\eta_i - \eta_{i+1}) - (1 - \beta)(\Phi(\eta_i) - \Phi(\eta_{i+1}))]$$

Même Forme de section rectangulaire mais  $3 < N < 4$

5.1.3 SECTION TRIANGULAIRE

$$S = \frac{1}{2} B h \Rightarrow \frac{dS}{dx} = \frac{1}{2} h \frac{dB}{dx}$$

$$(x_i - x_{i+1}) = \frac{\frac{1}{2}\beta h}{J_f(\eta^{N-1})} [\ln B_i - \ln B_{i+1}] + \frac{h_n}{J_f} [(\eta_i - \eta_{i+1}) - (1 - \beta)(\Phi(\eta_i) - \Phi(\eta_{i+1}))]$$

Forme générale pour section triangulaire  $5.3 < N < 5.5$  (25)

5.1.4 SECTION PARABOLIQUE

$$S = \frac{2}{3} B h \Rightarrow \frac{dS}{dx} = \frac{2}{3} h \frac{dB}{dx}$$

$$(x_i - x_{i+1}) = \frac{\frac{2}{3}\beta h}{J_f(\eta^{N-1})} [\ln B_i - \ln B_{i+1}] + \frac{h_n}{J_f} [(\eta_i - \eta_{i+1}) - (1 - \beta)(\Phi(\eta_i) - \Phi(\eta_{i+1}))]$$

Forme générale pour section parabolique  $N = 4.0$  (26)

6 CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES DU CANAL NON-PRISMATIQUE

Un canal dont la section varie et dont la pente longitudinale et la rugosité ne reste pas constantes (la hauteur d’eau peut cependant varier). Si non, on l’appelle canal prismatique.

6.1 RUGOSITÉ COMPOSÉE

Pour des sections à périmètre mouille non homogène le lit et chaque paroi (berge) ont des rugosités différentes (voir figure. 1) il faut alors calculer un coefficient de frottement équivalent, selon Einstein (voir Chow 1959 p.136) on y divise de manière raisonnable la surface mouillée S en N part chacune ayant un périmètre mouille  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_N$ , et son coefficient de frottement :  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_N$ . Le coefficient de frottement équivalent d’une rugosité composée se calcule par équation (27):

$$n = \left( \frac{\sum_1^N (p_N n_N^{3/2})}{p} \right)^{2/3}$$

(27)

6.1.1 PENTE MOYENNE

Une pente moyenne de fond peut être approximativement obtenue en utilisant les cotes de niveau (thalweg) z(x) (ligne fictive qui relie les points les plus bas des sections transversales le long du lit du canal) des sections ainsi que la distance entre elles.

$$J_f = \frac{\Delta z}{\Delta x} \approx \sum_1^N \frac{J_f N}{N}$$

(28)

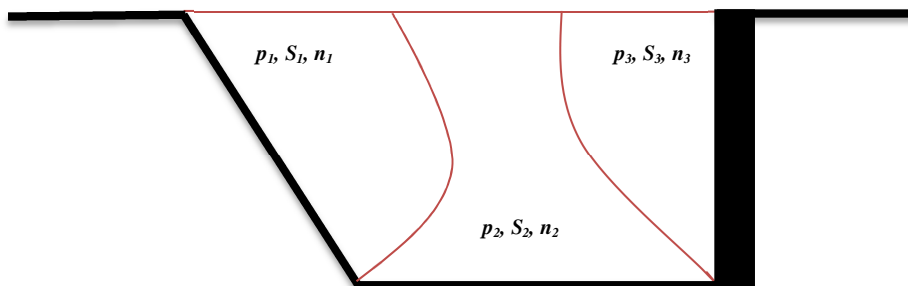


Fig. 1. Section a rugosité composée

➤ EXEMPLE DE CALCUL 1

Un canal de section trapézoïdal de profil non prismatique d’une largeur  $b = 7$  [m] ayant une pente de talus  $m = 1.5$  transporte un débit de  $Q = 28$  [m<sup>3</sup>/S] la pente du fond varie le long du lit du canal  $J_{f1} = 0.0030, J_{f2} = 0.0017, J_{f3} = 0.0024, J_{f4} =$

0.0017, voir (figure.2) et le coefficient de rugosité est déterminé comme  $n$  [ $m^{-1/3} S$ ], coefficient de frottement du béton lisse varie selon le lit et les parois (berges) du canal  $n_1 = 1/75 = 0.013$  [ $m^{-1/3} S$ ],  $n_2 = 1/80 = 0.012$  [ $m^{-1/3} S$ ],  $n_3 = 1/95 = 0.010$  [ $m^{-1/3} S$ ], la profondeur d'eau  $h = 1.5$  [m] .

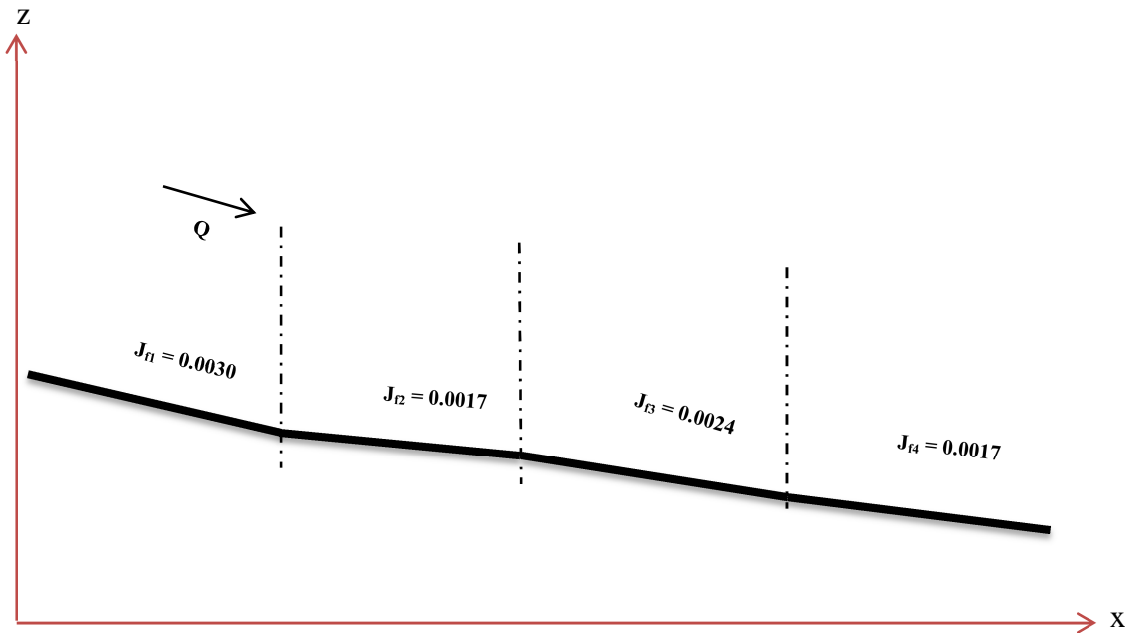


Fig. 2. Exemple de calcul pour un canal non-prismatique

En utilisant la méthode que nous avons vue précédemment, pour déterminer la forme de la surface d'eau, et les résultats se présentant comme suit :

$$n = \left( \frac{\sum_1^N (p_N n_N^{3/2})}{p} \right)^{2/3} = 0.012 [m^{-1/3} S]$$

$$J_f = \frac{\Delta z}{\Delta x} \approx \sum_1^4 \frac{Jf_N}{N} = \frac{0.0024 + 0.0017 + 0.0030 + 0.0017}{4} = 0.0022$$

A l'aide d'un tableur, l'équation (10) est résolue par une procédure itérative afin de déterminer la profondeur normale.

Tableau 2. Calcul itératif de la profondeur normale

b = 7 [m], m = 1.5, n = 0.012 [ $m^{-1/3} S$ ], $J_f = 0.0022$ , Q = 28 [ $m^3 / S$ ]						
essais	$h_n$ [m]	S [ $m^2$ ]	P [m]	$R_h$ [m]	$Q_{calc}$ [ $m^3 / S$ ]	Remarques
1	0.9860	8.360	10.555	0.792	27.971	Non! 27.971 < 28.00 Essayer: $h_n > 0.9860$ [m]
2	0.9875	8.375	10.560	0.793	28.045	Non! 28.045 > 28.00 Essayer: $0.9860$ [m] < $h_n$ < $0.9875$ [m]
3	0.9868	8.368	10.558	0.792	27.999	oui! 27.999 $\approx$ 28.00 $h_n = 0.9868$ [m]

Dans le cas d'un écoulement critique on a :

$$\frac{U_c}{\sqrt{gD_{hc}}} = 1 \tag{27}$$

Où  $U_c x = Q / S_c$  . En introduisant les expressions pour  $U_c$  et  $gD_{hc}$  dans l'équation (27).

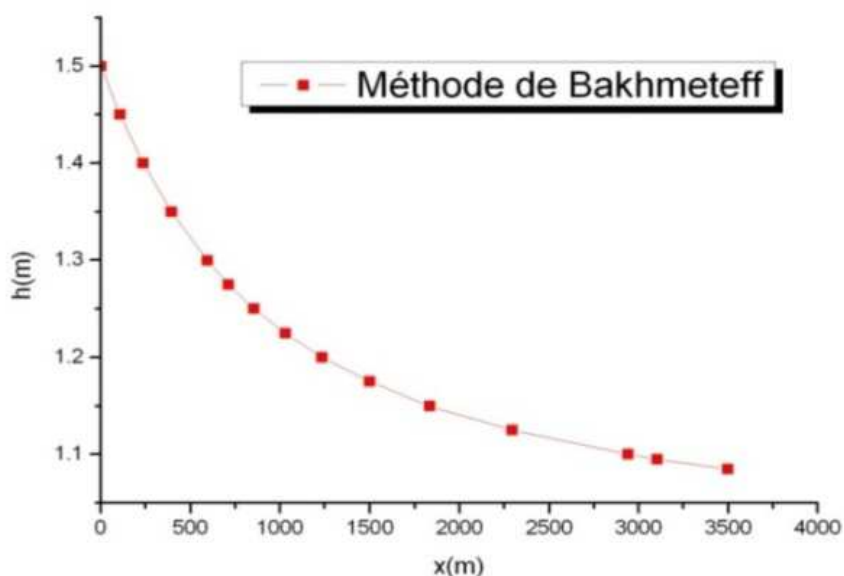
$$Q = \sqrt{gS_c^3/B} \tag{28}$$

Cette équation est résolue par une procédure itérative afin de déterminer la profondeur critique. la feuille de calcul est présentée ci-dessous.

Comme  $h_n < h_c$  et  $J_f (= 0.0022) > J_c (= 0.0016)$  l'écoulement est à forte pente. La ligne de la surface d'eau sera donc une courbe de type S. Puisque  $h > h_c > h_n$  ;  $J_f > J_c$  donc  $Fr < 1$  ;  $dh/dx$  positif. Le type de courbe de remous obtenue est S de branche S1. L'ensemble de résultats obtenus par cette méthode sont regroupés dans le tableau (4) et présenté sur la figure (3)

**Tableau 3. Calcul itératif de la profondeur critique**

b = 7 [m], m = 1.5, n = 0.012 [m <sup>-1/3</sup> S], J <sub>f</sub> = 0.0022, Q = 28 [m <sup>3</sup> /S]						
essais	h <sub>c</sub> [m]	S <sub>c</sub> [m <sup>2</sup> ]	B[m]	g [m <sup>3</sup> /S]	Q <sub>calc</sub> [m <sup>3</sup> /S]	Remarques
1	1.200	10.560	10.600	9.81	33.012	Non! 33.012 > 28.00 Essayer: h <sub>c</sub> < 1.200 [m]
2	1.000	8.500	10.000	9.81	24.545	Non! 24.545 < 28.00 Essayer: 1.000 [m] < h <sub>c</sub> < 1.200[m]
3	1.085	9.258	10.254	9.81	27.999	oui! 27.999 ≈ 28.00 Essayer: h <sub>c</sub> = 1.085 [m]



**Fig. 3. Calcul de la ligne d'eau avec la méthode de Bakhmeteff pour une forme de section trapézoïdale du canal de faible rugosité (n=0.012m<sup>-1/3</sup> s)**



**Tableau 4. Calcul de la ligne d'eau avec la méthode de Bakhmeteff pour une forme de section trapézoïdale du canal de faible rugosité :**

b = 7 [m] ; m = 1.5 ; n = 0.012 [m <sup>-1/3</sup> S] ; J <sub>f</sub> = 0.0022 ; Q = 28 [m <sup>3</sup> / S]							
h <sub>n</sub> = 0.9868 [m] ; h <sub>c</sub> = 1.085 [m] ; h <sub>c</sub> /h <sub>n</sub> = 1.0995 [-] ; J <sub>c</sub> = 0.0016							
1	2	3	4	5	6	7	8
h [m]	β [-]	N [-]	B [m]	η [-]	Φ (η, N)	x'	x
1.500	1.375	3.56	11.500	1.52	0.149	41.361	0
1.450	1.375	3.55	11.350	1.469	0.167	-66.617	107.979
1.400	1.375	3.54	11.200	1.419	0.187	-195.280	236.641
1.350	1.375	3.53	11.050	1.368	0.212	-352.668	394.029
1.300	1.375	3.52	10.900	1.317	0.242	-552.764	594.125
1.270	1.375	3.52	10.750	1.287	0.261	-672.686	714.048
1.250	1.375	3.52	10.735	1.267	0.275	-814.483	855.845
1.225	1.375	3.51	10.720	1.241	0.299	-988.691	1030.053
1.200	1.375	3.51	10.705	1.216	0.323	-1194.310	1235.672
1.175	1.375	3.50	10.690	1.191	0.352	-1459.173	1500.535
1.150	1.375	3.50	10.675	1.165	0.386	-1792.560	1833.921
1.125	1.375	3.49	10.660	1.140	0.428	-2252.564	2293.925
1.100	1.375	3.49	10.645	1.115	0.475	-2899.338	2940.700
1.095	1.375	3.49	10.630	1.110	0.487	-3063.798	3105.160
1.085	1.375	3.48	10.612	1.100	0.514	-3455.802	3497.163

➤ **EXEMPLE DE CALCUL 2**

Un canal de section rectangulaire de profil non prismatique d'une largeur  $b = 2h$  [m] transporte un débit de  $Q = 28$  [m<sup>3</sup>/S] la pente du fond varie le long du lit du canal  $J_{f1} = 0.0030$ ,  $J_{f2} = 0.0017$ ,  $J_{f3} = 0.0024$ ,  $J_{f4} = 0.0017$ , et le coefficient de rugosité est déterminé comme  $n$  [m<sup>-1/3</sup> S], coefficient de frottement de béton lisse varie selon le lit et les parois (berges) du canal  $n_1 = 0.013$  [m<sup>-1/3</sup> S],  $n_2 = 0.012$  [m<sup>-1/3</sup> S],  $n_3 = 0.010$  [m<sup>-1/3</sup> S], la profondeur d'eau  $h = 1.5$  [m].

**Tableau 5. Calcul itératif de la profondeur normal**

b = 2*h [m], n = 0.012 [m <sup>-1/3</sup> S], J <sub>f</sub> = 0.0022, Q = 28 [m <sup>3</sup> / S]						
Essais	h <sub>n</sub> [m]	S [m <sup>2</sup> ]	P [m]	R <sub>h</sub> [m]	Q <sub>calc</sub> [m <sup>3</sup> / S]	Remarques
1	1.75	6.125	7.00	0.875	21.90	Non! 21.60 < 28.00 Essayer: h <sub>n</sub> > 1.75 [m]
2	2.00	8.00	8.00	1.00	31.269	Non! 31.269 > 28.00 Essayer: 1.75 [m] < h <sub>n</sub> < 2.00 [m]
3	1.919	7.365	7.676	0.959	27.999	oui! 27.999 ≈ 28.00 Essayer: h <sub>n</sub> = 1.9190 [m]

Comme  $h_n > h_c$  et  $J_f (= 0.0022) < J_c (= 0.0071)$  l'écoulement est à pente faible. La ligne de la surface d'eau sera donc une courbe de type M.

Puisque  $h_n > h_c > h$  et  $J_f < J_c$  donc  $Fr > 1$  et  $dh/dx$  positif.

Le type de courbe de remous obtenue est M de branche M3.

L'ensemble de résultats obtenus par cette méthode sont regroupés dans le tableau (2) et présentés sur la figure (4).

Tableau 6. Calcul itératif de la profondeur critique

b = 2h [m], m = 1.5, n = 0.012 [m <sup>-1/3</sup> S], J <sub>f</sub> = 0.0022, Q = 28 [m <sup>3</sup> /S]						
Essais	h <sub>c</sub> [m]	S <sub>c</sub> [m <sup>2</sup> ]	B[m]	$\frac{g}{[m^3/S]}$	Q <sub>calc</sub> [m <sup>3</sup> /S]	Remarques
1	1.850	6.845	3.7	9.81	29.160	Non! 29.160 > 28.00 Essayer: h <sub>c</sub> < 1.850 [m]
2	1.800	6.48	3.6	9.81	27.230	Non! 27.230 < 28.00 Essayer: 1.800 [m] < h <sub>c</sub> < 1.850 [m]
3	1.8201	6.626	3.64	9.81	27.999	oui! 27.999 ≈ 28.00 Essayer: h <sub>c</sub> = 1.8201 [m]

Tableau 7. Calcul de la ligne d'eau avec la méthode de Bakhmeteff pour une forme rectangulaire du canal de faible rugosité :

b = 2*h [m] ; n = 0.012 [m <sup>-1/3</sup> S] ; J <sub>f</sub> = 0.0022 ; Q = 28 [m <sup>3</sup> / S]							
h <sub>n</sub> = 1.9190 [m] ; h <sub>c</sub> = 1.8201 [m] ; h <sub>c</sub> /h <sub>n</sub> = 0.8303 [-]							
1	2	3	4	5	6	7	8
h [m]	β [-]	N [-]	B [m]	η [-]	Φ (η, N)	x'	x
1.5000	0.75862069	2.50	3.000	0.782	0.967	1714.030	0
1.5201	0.75862069	2.50	3.040	0.792	0.989	1802.741	88.711
1.5451	0.75862069	2.50	3.090	0.805	1.020	1924.627	210.598
1.5701	0.75862069	2.50	3.140	0.818	1.052	2062.702	348.672
1.5951	0.75862069	2.50	3.190	0.831	1.086	2220.553	506.523
1.6201	0.75862069	2.50	3.240	0.844	1.123	2403.040	689.011
1.6451	0.75862069	2.50	3.290	0.857	1.162	2617.297	903.267
1.6701	0.75862069	2.50	3.340	0.870	1.203	2873.025	1158.995
1.6951	0.75862069	2.50	3.390	0.883	1.255	3182.367	1468.337
1.7201	0.75862069	2.50	3.440	0.896	1.303	3569.576	1855.547
1.7451	0.75862069	2.50	3.490	0.909	1.359	4065.352	2351.322
1.7701	0.75862069	2.50	3.540	0.922	1.408	4728.391	3014.362
1.7951	0.75862069	2.50	3.590	0.935	1.5	5648.534	3934.504
1.8201	0.75862069	2.50	3.640	0.948	1.601	7034.787	5320.757

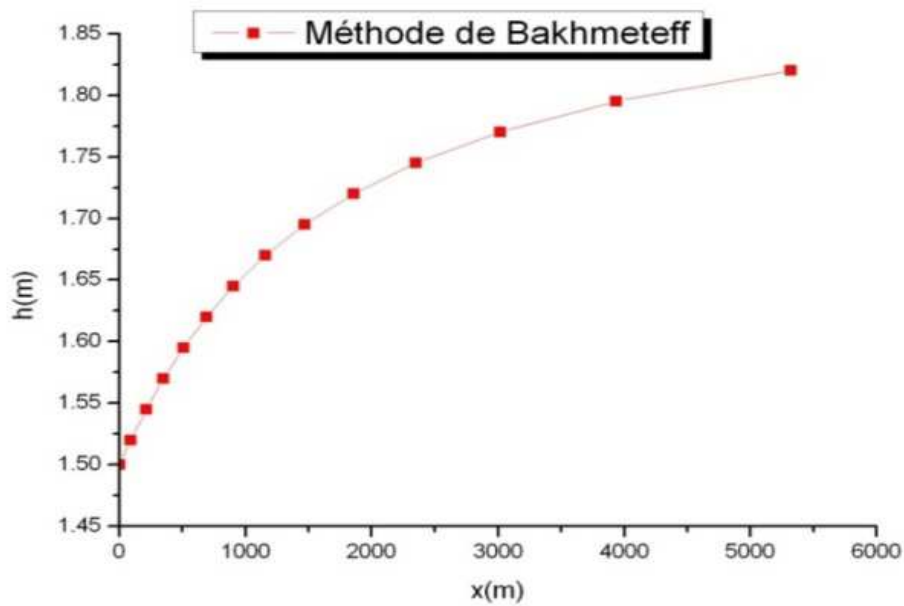


Fig. 4. Calcul de la ligne d'eau avec la méthode de Bakhmeteff pour une forme de section rectangulaire du canal de faible rugosité ( $n=0.012m^{-1/3} s$ )

#### ➤ EXEMPLE DE CALCUL 3

Un canal de section triangulaire de profil non prismatique ayant une pente de talus  $m = 1.5$  transporte un débit de  $Q = 28$  [ $m^3/S$ ] la pente du fond varie le long du lit du canal  $J_{f1} = 0.0030, J_{f2} = 0.0017, J_{f3} = 0.0024, J_{f4} = 0.0017$ , et le coefficient de rugosité est déterminé comme  $n$  [ $m^{-1/3} S$ ], coefficient de frottement de béton lisse varie selon le lit et les parois (berges) du canal  $n_1 = 0.013$  [ $m^{-1/3} S$ ],  $n_3 = 0.010$  [ $m^{-1/3} S$ ], la profondeur d'eau  $h = 1.5$  [m]

Tableau 8. Calcul itératif de la profondeur normal

b = 2*m*h [m], m = 1.5, n = 0.012 [ $m^{-1/3} S$ ], $J_f = 0.0022, Q = 28$ [ $m^3 /S$ ]						
Essais	$h_n$ [m]	$S$ [ $m^2$ ]	$P$ [m]	$R_h$ [m]	$Q_{calc}$ [ $m^3 /S$ ]	Remarques
1	2.215	7.426	8.022	0.926	27.576	Non! 27.576 < 28.00 Essayer: $h_n > 2.215$ [m]
2	2.555	9.792	9.212	1.063	39.865	Non! 39.865 > 28.00 Essayer: 2.215 [m] < $h_n$ < 2.555[m]
3	2.2380	7.513	8.069	0.931	27.999	oui! 27.999 $\approx$ 28.00 Essayer: $h_n = 2.2380$ [m]

Comme  $h_n < h_c$  et  $J_f (= 0.0022) > J_c (= 0.0017)$  l'écoulement est à forte pente. La ligne de la surface d'eau sera donc une courbe de type S. Puisque  $h_c > h_n > h$  et  $J_f > J_c$  donc  $Fr > 1$  et  $dh/dx$  positif. Le type de courbe de remous obtenue est S de branche S3. L'ensemble de résultats obtenus par cette méthode sont regroupés dans le tableau (3) et présentés sur la figure (5).

Tableau 9. Calcul itératif de la profondeur critique

b = 2*m*h [m], m = 1.5, n = 0.012 [m <sup>-1/3</sup> S], J <sub>f</sub> = 0.0022, Q = 28 [m <sup>3</sup> /S]						
Essais	h <sub>c</sub> [m]	S <sub>c</sub> [m <sup>2</sup> ]	B[m]	g [m <sup>3</sup> /S]	Q <sub>calc</sub> [m <sup>3</sup> /S]	Remarques
1	2.400	8.640	7.20	9.81	29.644	Non! 29.644 > 28.00 Essayer: h <sub>c</sub> < 2.400 [m]
2	2.335	8.178	7.005	9.81	27.676	Non! 27.676 < 28.00 Essayer: 2.335 [m] < h <sub>c</sub> < 2.400 [m]
3	2.3458	8.254	7.037	9.81	27.999	oui! 27.999 ≈ 28.00 Essayer: h <sub>c</sub> = 2.3458 [m]

Tableau 10. Calcul de la ligne d'eau avec la méthode de Bakhmeteff pour une forme triangulaire du canal de faible rugosité :

b = 2*m*h [m] , m = 1.5 ; n = 0.012 [m <sup>-1/3</sup> S] ; J <sub>f</sub> = 0.0022 ; Q = 28 [m <sup>3</sup> /S]							
h <sub>n</sub> = 2.2380 [m] ; h <sub>c</sub> = 2.3458 [m] ; h <sub>c</sub> /h <sub>n</sub> = 1.0482 [-]							
1	2	3	4	5	6	7	8
h [m]	β [-]	N [-]	B [m]	η [-]	Φ (η, N)	x'	x
1.500	1.294118	5.33	4.500	0.670	0.685	1639.557	0
1.536	1.294118	5.33	4.608	0.686	0.704	1706.276	66.719
1.5860	1.294118	5.33	4.758	0.709	0.731	1805.352	165.795
1.6360	1.294118	5.33	4.908	0.731	0.758	1913.425	273.868
1.6860	1.294118	5.33	5.058	0.753	0.786	2033.386	393.829
1.7360	1.294118	5.33	5.208	0.776	0.818	2169.762	530.205
1.7860	1.294118	5.33	5.358	0.798	0.848	2325.999	686.442
1.8360	1.294118	5.33	5.508	0.820	0.882	2511.737	872.180
1.8860	1.294118	5.33	5.658	0.843	0.920	2739.281	1099.724
1.9360	1.294118	5.33	5.808	0.865	0.959	3028.181	1388.624
1.9860	1.294118	5.33	5.958	0.887	1.004	3416.599	1777.042
2.0360	1.294118	5.33	6.108	0.910	1.058	3978.393	2338.836
2.0860	1.294118	5.33	6.258	0.932	1.123	4883.100	3243.543
2.1360	1.294118	6.408	6.408	0.954	1.210	6634.168	4994.611
2.1860	1.294118	5.33	6.558	0.977	1.355	11666.140	10026.583
2.2360	1.294118	5.33	6.708	0.999	1.947	264894.402	263254.845

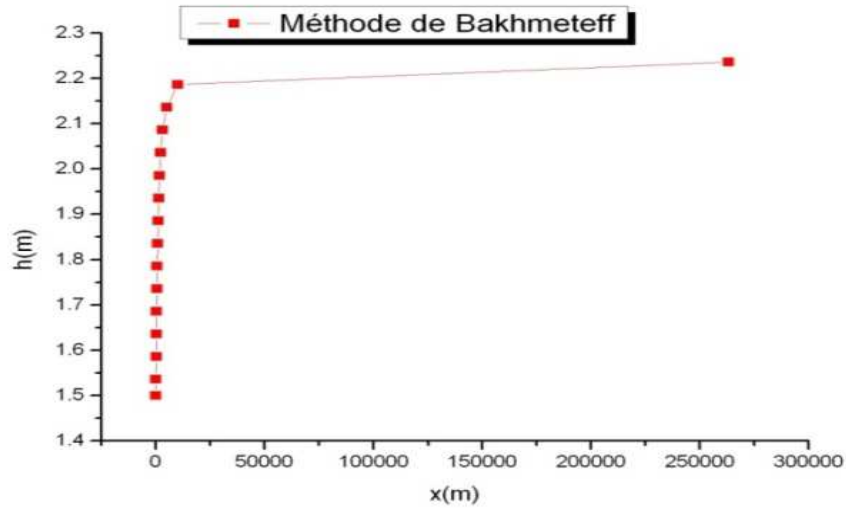


Fig. 5. Calcul de la ligne d'eau avec la méthode de Bakhmeteff pour une forme de section rectangulaire du canal de faible rugosité ( $n=0.012m^{-1/3} s$ )

➤ EXEMPLE DE CALCUL 4

Un canal de section parabolique de profil non prismatique transporte un débit de  $Q = 28 [m^3/S]$  la pente du fond varie le long du lit du canal  $J_{f1} = 0.0030, J_{f2} = 0.0017, J_{f3} = 0.0024, J_{f4} = 0.0017$ , et le coefficient de rugosité est déterminé comme  $n [m^{-1/3} S]$ , coefficient de frottement de béton lisse varie selon le lit et les parois (berges) du canal  $n_1 = 0.013 [m^{-1/3} S], n_3 = 0.010 [m^{-1/3} S]$ , la largeur au miroir  $B = 3[m], \xi = \frac{4h}{B}$ , la largeur au miroir  $B = 12[m], \xi = \frac{4h}{B}$ , et profondeur d'eau  $h = 1.5[m]$

Tableau 11. Calcul itératif de la profondeur normale

B = 12 [m], m = 1.5, n = 0.012 [m <sup>-1/3</sup> S], J <sub>f</sub> = 0.0022, Q = 28 [m <sup>3</sup> /S]						
Essais	h <sub>n</sub> [m]	S [m <sup>2</sup> ]	P [m]	R <sub>h</sub> [m]	Q <sub>calc</sub> [m <sup>3</sup> /S]	Remarques
1	1.110	8.880	12.2738	0.7235	27.9727	Non! 27.700 < 28.00 Essayer: h <sub>n</sub> > 3.800 [m]
2	1.112	8.896	12.2748	0.7247	28.054	Non! 28.054 > 28.00 Essayer: 1.11 [m] < h <sub>n</sub> < 1.112 [m]
3	1.1106	8.885	12.2741	0.7239	27.999	oui! 27.999 ≈ 28.00 Essayer: h <sub>n</sub> = 1.1106 [m]

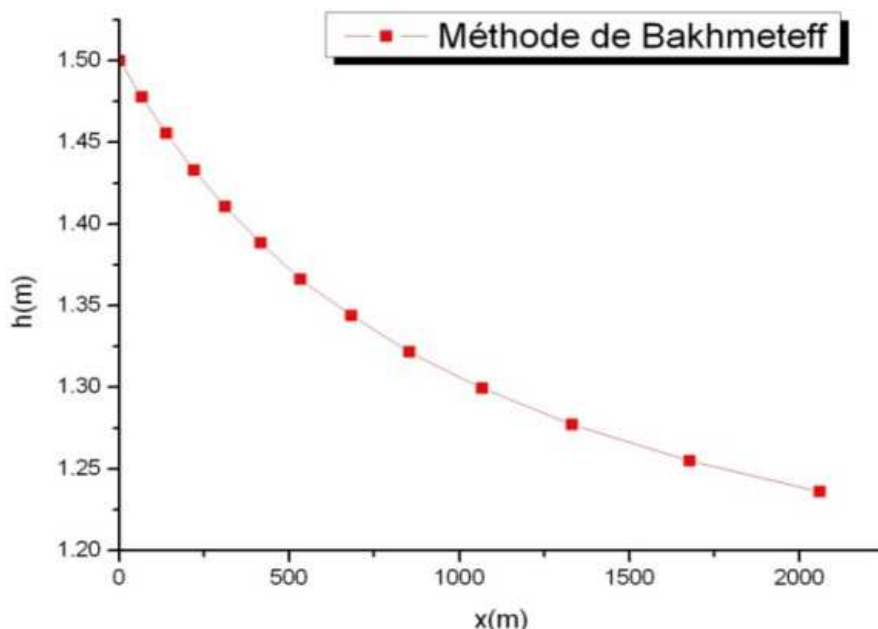
Tableau 12. Calcul itératif de la profondeur critique

B = 12 [m], n = 0.017 [m <sup>-1/3</sup> S], J <sub>f</sub> = 0.0022, Q = 28 [m <sup>3</sup> /S]						
Essais	h <sub>c</sub> [m]	S <sub>c</sub> [m <sup>2</sup> ]	B [m]	g [m <sup>3</sup> /S]	Q <sub>calc</sub> [m <sup>3</sup> /S]	Remarques
1	1.300	10.40	12.00	9.81	30.32	Non! 30.32 > 28.00 Essayer: h <sub>c</sub> < 1.300 [m]
2	1.230	9.840	12.00	9.81	27.908	Non! 27.908 < 28.00 Essayer: 1.230 [m] < h <sub>c</sub> < 1.30 [m]
3	1.2326	9.8608	12.00	9.81	27.999	oui! 27.999 ≈ 28.00 Essayer: h <sub>c</sub> = 1.2326 [m]

Comme  $h_c > h_n$  et  $J_f (= 0.0022) > J_c (= 0.0016)$  l'écoulement est à pente faible. La ligne de la surface d'eau sera donc une courbe de type S. Puisque  $h > h_c > h_n$ ;  $J_f > J_c$  donc  $Fr < 1$ ;  $dh/dx$  positif. Le type de courbe de remous obtenue est S de branche S1. L'ensemble de résultats obtenus par cette méthode sont regroupés dans le tableau (4) et présentés sur la figure (6).

**Tableau 13. Calcul de la ligne d'eau avec la méthode de Bakhmeteff pour une forme parabolique du canal de faible rugosité :**

B = 12.00 [m] , n = 0.017 [m-1/3 S] ; J <sub>f</sub> = 0.0022 ; Q = 28 [m <sup>3</sup> / S]							
h <sub>n</sub> = 5.285 [m] ; h <sub>c</sub> = 3.106 [m] ; h <sub>c</sub> /h <sub>n</sub> = 1.0482 [-]							
1	2	3	4	5	6	7	8
h [m]	β [-]	N [-]	B [m]	η [-]	φ (η, N)	x'	x
1.5000	1.37500000	4.00	12.00	1.351	0.157	44.307	0
1.4777	1.37500000	4.00	12.30	1.331	0.166	-20.933	65.240
1.4554	1.37500000	4.00	12.60	1.310	0.176	-93.411	137.718
1.4331	1.37500000	4.00	12.90	1.290	0.187	-174.665	218.972
1.4108	1.37500000	4.00	13.20	1.270	0.199	-266.687	310.994
1.3885	1.37500000	4.00	13.50	1.250	0.212	-372.107	416.414
1.3662	1.37500000	4.00	13.80	1.230	0.252	-489.549	533.856
1.3439	1.37500000	4.00	14.10	1.210	0.244	-638.110	682.417
1.3216	1.37500000	4.00	14.40	1.190	0.262	-810.751	855.058
1.2993	1.37500000	4.00	14.70	1.170	0.283	-1022.084	1066.391
1.2770	1.37500000	4.00	15.00	1.150	0.308	-1287.675	1331.982
1.2547	1.37500000	4.00	15.30	1.130	0.337	-1633.027	1677.334
1.2360	1.37500000	4.00	15.60	1.113	0.372	-2016.969	2061.275



**Fig 6. Calcul de la ligne d'eau avec la méthode de Bakhmeteff pour une forme de section parabolique du canal de faible rugosité (n=0.012m<sup>-1/3</sup> s)**

## 7 CONCLUSION

La présente étude a pour objet la classification des courbes de remous dans un canal de profil non prismatique à des sections diverses, selon la méthode de résolution que nous avons élaborée. Cette méthode a avant que faire se peut qui a permis de visualiser le profil en long de la ligne d'eau pour des écoulements de débit connus.

Au vu des résultats obtenus, nous pouvons conclure d'une façon générale que le calcul des courbes de remous pour les écoulements graduellement variés à surface libre dans les canaux découverts de profil non prismatique permet de déduire la profondeur à tout point du canal, il consiste à suivre l'évolution de la ligne d'eau sur toute la longueur du canal considéré. Et par conséquent nous avons observé les remarques suivantes :

- Bien que la ligne d'eau soit calculée par intégration directe (méthode Bakhmeteff), converge plus lentement vers la profondeur normale ou critique, la méthode des tronçons qui est en général plus longue à appliquer, mais souvent aussi elle est plus précise.
- L'intégration de l'équation différentielle est directe. Cela veut dire qu'on peut passer d'une section à l'autre quel que soit la distance entre ces sections, ce qui n'est pas le cas avec les autres méthodes où il faut avancer par petites distances. On trouve évidemment ces avantages dans la méthode par intégration direct.

## REFERENCES

- [1] Walter H. Graf en collaboration avec M. S. Altinakar(1993), hydraulique fluvial. Tome 1, Ecoulement permanent uniforme et non uniforme presses Polyethnique et universitaire Romande.
- [2] LENCASTRE, A.(1986).Hydraulique générale, 2ème édition EYROLLES, Paris.
- [3] SILBER R. (1968) : étude et trace des écoulements permanents en canaux et ravier, Dunod, Paris, F
- [4] GRAF W.H & M. ALTINAKAR (1991): hydrodynamique Eyrolles, Paris, F.
- [5] CARLIER M. (1972) : hydraulique général et appliquée, Eyrolles. Paris,F.
- [6] BAKHMETEFF B.A (1932): hydraulics of open channel flow, McGraw-Hill, New York, USA.
- [7] CHOW V.T (1959): open channel hydraulics of flow, McGraw-Hill, New York, USA.
- [8] JAEGER C. (1954): hydraulique technique, Dunod, Paris, F
- [9] HENDERSON F.M. (1966): open channel flow, Macmillan comp, New York, USA.
- [10] CRAUSSE E. (1951): Hydraulique des canaux découverts, Eyrolles. Paris,F.
- [11] FLAMANT A. (1923): Hydraulique, Librairie Polytechn., Béranfer, Paris,F.
- [12] RANGA-RAJU K.G. (1981): Flow through Open Channels, Tata McGraw-Hill, New Dehli, IN.